ABN6570
UL FMT B RT a BL m T/C DT 07/18/88 R/DT 07/18/88 CC STAT mm E/L 1
035/1: : |a (RLIN)MIUG86-B46000
035/2: : |a (CaOTULAS)160035746
040: : |a MiU |c MiU
100:1 : |a Ganter, Heinrich.
245:04: |a Die Elemente der analytischen Geometrie der Ebene ... |c von dr. H. Ganter und dr. F. Rudio.
260: : |a Leipzig, |b B. G. Teubner, |c 1888.
300/1: : |a 166 p.
500/1: : |a "Berichtingungen" slip inserted at end.
650/1: 0: |a Geometry, Analytic
700/1:1 : |a Rudio, Ferdinand, |d 1856-1929. |e joint author.
998: : |c WFA |s 9124

DIE ELEMENTE

DER

ANALYTISCHEN GEOMETRIE DER EBENE.

ZUM GEBRAUCH AN HÖHEREN LEHRANSTALTEN

SOWIE ZUM SELBSTSTUDIUM

DARGESTELLT

UND MIT ZAHLREICHEN ÜBUNGSBEISPIELEN VERSEHEN

VON

DR. H. GANTER UND DR. F. RUDIO

PROFESSOR AN DER KANTONSSCHULE IN AARAU.

PROFESSOR AM POLYTECHNIKUM IN ZÜRICH.



LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1888.

Vorrede.

Die Zahl derjenigen Lehrbücher der analytischen Geometrie, welche den zu behandelnden Stoff von vorn herein in enge, einem ersten Studium entsprechende Grenzen einschliefsen, innerhalb dieser Grenzen aber eine möglichste Vollständigkeit, verbunden mit einer streng wissenschaftlichen Darstellung, anstreben, scheint uns nicht so grofs zu sein, dafs wir es nicht wagen sollten, mit einem neuen Versuche dieser Art vor das mathematische Publikum zu treten.

Die von uns gewählte Begrenzung des Stoffes ist dadurch bestimmt, dafs wir die Diskussion der allgemeinen Gleichung zweiten Grades mit zwei Unbekannten nicht mehr mit in die Darstellung aufgenommen haben. Wir haben uns dazu durch zwei Gründe veranlafst gesehen. Einmal nämlich sind wir der Meinung, dafs die vollständige Diskussion dieser allgemeinen Gleichung überhaupt nicht mehr in die Schule gehört, weil sie mit den dort disponibeln Mitteln doch nicht in befriedigender Weise durchgeführt werden kann. Sodann aber hätten wir, falls auf die angeregte Frage noch in erschöpfender Weise eingetreten worden wäre, unsere Darstellung doch unmittelbar nach Erledigung dieses Themas abbrechen müssen, wenn der beabsichtigte Umfang des Buches nicht aufgegeben werden sollte. Den zu einer befriedigenden Behandlung der allgemeinen Gleichung zweiten Grades erforderlichen Raum glaubten wir dann aber besser zu einer gründlicheren Darstellung der geometrischen Eigenschaften der einzelnen Kegelschnitte verwenden zu können, als sie sonst in Büchern gleichen Umfanges üblich ist.

Das vorliegende Lehrbuch enthält ungefähr soviel, als auf einem Gymnasium behandelt werden kann, wenn an demselben einmal die klassisch-philologischen Studien einerseits und die mathematisch-naturwissenschaftlichen andererseits zu einander in das richtige, dem modernen Leben entsprechende Verhältnis getreten sein werden; mufs doch bei aller Bewunderung für die Schöpfungen des Alterthums mehr und mehr die Einsicht durchdringen, dafs unsere moderne Kultur in weit

höherem Maſse auf den gewaltigen Fortschritten der Naturwissenschaften und den dadurch bedingten Änderungen unserer Anschauungen und Lebensverhältnisse beruht.

Aber auch unter den gegenwärtig noch bestehenden Verhältnissen könnte und sollte der analytischen Geometrie innerhalb des mathematischen Unterrichtes selbst ein gröſserer Raum gewährt werden als bisher üblich war. Es wäre dies leicht zu erreichen, wenn man in den elementaren Gebieten mit der Zeit etwas besser haushalten und sich beispielsweise bei den Schülern mit einer geringeren Virtuosität im Logarithmenaufschlagen oder im Lösen planimetrischer Konstruktionsaufgaben, die meist als zusammenhangslose Kunststückchen erscheinen müssen, begnügen wollte. Man braucht nicht Mathematiker zu sein, um zu erkennen, welche Bedeutung der analytischen Geometrie für die allgemeine Bildung zukommt. Der flüchtigste Blick auf die Bedürfnisse nicht nur des wissenschaftlichen, sondern auch des gewöhnlichen praktischen Lebens belehrt uns hierüber. Kein Arzt, kein Jurist, kein Nationalökonom, kein Statistiker, von Naturforschern, Technikern u. s. w. gar nicht zu reden, kurzum Keiner, der die Erscheinungen in ihrer gesetzmäſsigen Aufeinanderfolge und gegenseitigen Abhängigkeit zu beobachten Veranlassung hat, kann heutzutage der Grundanschauungen der analytischen Geometrie entbehren. Daſs die Schule geradezu verpflichtet ist, ihren Schülern Anschauungen von so hoher Bedeutung zu vermitteln, scheint uns keine übertriebene Forderung zu sein; der hierzu notwendige Raum wird und muſs im Lehrplane des Gymnasiums geschaffen werden.

Über Inhalt und Umfang des vorliegenden Werkchens giebt das Inhaltsverzeichnis genügenden Aufschluss, sodass wir an dieser Stelle von einer weiteren Besprechung absehen können. Die Brauchbarbeit unseres Buches glauben wir namentlich durch das jedem einzelnen Paragraphen hinzugefügte Übungsmaterial erhöht zu haben (im Ganzen enthält das Buch gegen 400 Aufgaben). Obwohl der Kundige die Darstellung durchweg als eine eigenartige, von der gewöhnlichen sogar vielfach abweichende erkennen wird, so fühlen wir uns doch veranlaſst, der Anregungen Erwähnung zu thun, welche wir aus den ausgezeichneten Werken von Fort und Schlömilch, Joachimsthal und Salmon-Fiedler geschöpft haben.

Aarau und Zürich, Mai 1888.

Die Verfasser.

Inhaltsverzeichnis.

Erstes Kapitel.

Der Punkt. (60 Aufgaben.)

Zweites Kapitel.

Die gerade Linie. (78 Aufgaben.)

Drittes Kapitel.

Der Kreis. (49 Aufgaben.)

Viertes Kapitel.

Die Ellipse. (82 Aufgaben.)

Fünftes Kapitel.

Die Hyperbel. (74 Aufgaben.)

Sechstes Kapitel.

Die Parabel. (36 Aufgaben.)

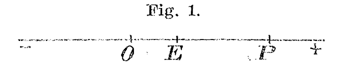
Erstes Kapitel.

Der Punkt.

§ 1. Bestimmung der Lage eines Punktes in einer Geraden durch seine Abscisse.

In einer als unbegrenzt gedachten Geraden seien zwei Punkte O und E gegeben, von denen wir den ersten als Anfangspunkt, den zweiten als Einheitspunkt bezeichnen.

Fig. 1.



Die Länge der Strecke OE wählen wir als Längeneinheit, durch die wir jede auf der Geraden befindliche Strecke messen wollen. Wir stellen uns etwa vor, OE sei gleich einem Centimeter, sodafs alle vorkommenden Strecken sich als Vielfache von einem Centimeter darstellen.

Indem wir dem Punkte O den Punkt E zugesellen, gewinnen wir aber nicht nur einen Mafsstab für die Längen der auf der Geraden vorkommenden Strecken, sondern wir sind jetzt auch im Stande, die beiden von O ausgehenden Richtungen unserer Geraden von einander zu unterscheiden. Wir wollen die Richtung von O nach E als die positive Richtung, die entgegengesetzte als die negative Richtung der Geraden bezeichnen. Dabei werden wir, um die Vorstellungen zu fixieren, ein für allemal den Punkt E rechts von O annehmen, sodafs die Richtung von O aus nach rechts als die positive, die von O aus nach links als die negative zu betrachten ist.

Ist nun auf der Geraden ein beliebiger Punkt P gegeben, so ist dessen Lage vollständig bestimmt, wenn man erstens

seine (durch die Längeneinheit OE gemessene) Entfernung vom Anfangspunkte O kennt und wenn man zweitens weiſs, ob er rechts oder links von O sich befindet. Es liegt daher nach dem Obigen nahe, die Entfernung OP mit einem Vorzeichen zu versehen, nämlich mit dem positiven, wenn die Richtung OP die positive ist, d. h. wenn P rechts von O liegt, dagegen mit dem negativen Vorzeichen, wenn die Richtung OP die negative ist, d. h. wenn P links von O sich befindet.

Man nennt die mit dem entsprechenden Vorzeichen versehene Entfernung OP die Abscisse des Punktes P in Bezug auf den Anfangspunkt O und dem entsprechend die gegebene Gerade OE die Abscissenachse.

Alle Punkte rechts von O haben dann positive, alle Punkte links von O negative Abscissen. Insbesondere hat E die Abscisse $+1$. Nach diesen Erörterungen wird der folgende Satz unmittelbar einleuchten:

Jedem Punkte P der Abscissenachse entspricht eine ganz bestimmte (positive oder negative) Zahl, nämlich seine Abscisse, und umgekehrt jeder (positiven oder negativen) Zahl entspricht ein ganz bestimmter Punkt der Abscissenachse, nämlich derjenige, dessen Abscisse gleich der gegebenen Zahl ist.

Wir sind demnach im Stande, die ganze Zahlenreihe von $-\infty$ bis $+\infty$ geometrisch durch eine Punktreihe zu veranschaulichen, gewissermaſsen abzubilden, und umgekehrt die Punktreihe, deren Träger die gegebene Gerade ist, in eindeutiger Weise durch eine Zahlenreihe zu repräsentieren. In dieser eigentümlichen Verknüpfung von Punkten und Zahlen besteht das Wesen der analytischen Geometrie.

Aufgabe.*) Nach Wahl von O und E bestimme die Punkte mit den Abscissen $1, -1, \frac{3}{2}, -\frac{4}{3}, \sqrt{2}, -\sqrt{3}$.

§ 2. Bestimmung von Strecken.

Die im Vorhergehenden entwickelten, auf der Einführung des Richtungsunterschiedes begründeten Anschauungen über-

*) Man zeichne bei dieser wie bei allen folgenden Aufgaben stets die zugehörige Figur.

tragen wir auch auf begrenzte Strecken der Abscissenachse, indem wir einen Unterschied machen zwischen der Strecke AB und der Strecke BA. Wir nennen eine beliebige Strecke AB mit dem Anfangspunkte A und dem Endpunkte B positiv oder negativ, je nachdem man, um von A nach B zu gelangen, in der positiven oder der negativen Richtung sich bewegen mufs. Dann ist also allemal die Strecke BA mit dem Anfangspunkte B und dem Endpunkte A der Strecke AB gleich und entgegengesetzt und daher:

$$AB + BA = 0.$$

Bedeutet C einen beliebigen dritten Punkt der Abscissenachse, so gilt in Folge dieser Festsetzungen stets, wie auch die drei Punkte zu einander liegen mögen, die Gleichung:

$$AB + BC + CA = 0$$

oder:

$$AB = CB - CA.$$

Bezeichnet man dem entsprechend mit x_1 und x_2 die Abscissen zweier Punkte P_1 und P_2 in Bezug auf den Anfangspunkt O, so hat man $P_1P_2 = OP_2 - OP_1 = x_2 - x_1$, während die Strecke P_2P_1 durch $x_1 - x_2$ dargestellt wird.

Wählt man ferner auf der Abscissenachse einen neuen Anfangspunkt O', dessen Abscisse $OO' = a$ ist und bezeichnet die Abscisse eines Punktes P in Bezug auf den alten Anfangspunkt O, also OP, mit x, dagegen die Abscisse von P in Bezug auf den neuen Anfangspunkt O', also $O'P$, mit x', so erhält man aus der Gleichung $O'P = OP - OO'$ die Relation:

$$x' = x - a \quad \text{oder} \quad x = x' + a.$$

Diese Gleichungen zeigen, wie sich die Abscisse eines Punktes beim Übergange zu einem neuen Anfangspunkte ändert.

Aufg. 1. Welches ist die Länge der Strecke AB, wenn die Abscissen von A und B in Bezug auf den Anfangspunkt O resp. $\frac{5}{3}$ und $-\frac{1}{2}$ sind? Welches Vorzeichen hat AB?

Aufg. 2. Bestimme Länge und Vorzeichen der Strecken P_1P_2 und P_2P_1, wenn die Abscissen von P_1 und P_2 das eine Mal $x_1 = 2$, $x_2 = 5$, ein anderes Mal $x_1 = -3$, $x_2 = \frac{1}{2}$, ein drittes Mal $x_1 = -1$, $x_2 = -\frac{1}{4}$ sind.

Aufg. 3. Beweise, dafs der Mittelpunkt der Strecke P_1P_2

die Abscisse $\frac{x_1 + x_2}{2}$ hat, wenn x_1 und x_2 die Abscissen von P_1 und P_2 sind.

Aufg. 4. Der neue Anfangspunkt O' habe in Bezug auf den alten Anfangspunkt O die Abscisse $a = -3$. Welches sind die neuen Abscissen der Punkte P_1, P_2, P_3, deren alte Abscissen resp. $x_1 = \frac{5}{2}$, $x_2 = -2$, $x_3 = -3$ sind?

§ 3. Bestimmung der Lage eines Punktes in einer Geraden durch sein Teilverhältnis.

Man kann die unendliche Zahlenreihe auf die Punktreihe einer Geraden noch in einer andern Weise abbilden. Zu diesem Zwecke fixieren wir zunächst wieder auf der Geraden eine positive und eine negative Richtung. Wir wählen sodann auf der Geraden zwei Punkte P_1 und P_2 und nennen die Strecke P_1P_2 die Fundamentalstrecke. Dieselbe besitzt nicht nur eine bestimmte Länge (gemessen durch die gewählte Längeneinheit), sondern auch eine bestimmte Richtung, durch welche sie sich von der Strecke P_2P_1 unterscheidet.

Sei jetzt P ein beliebiger dritter Punkt der Geraden, so ist stets:

$$P_1P + PP_2 + P_2P_1 = 0 \quad \text{oder} \quad P_1P = P_1P_2 - PP_2,$$

gleichgültig ob P auf der Fundamentalstrecke oder aufserhalb

Fig. 2.

P_1 M P_2 P

derselben liegt, wenn nur bei jeder der Strecken das Vorzeichen richtig beachtet wird. Man nennt das Verhältnis der beiden Teilstrecken P_1P und PP_2, also den Quotienten $\frac{P_1P}{PP_2}$, das Teilverhältnis des Punktes P in Bezug auf die Fundamentalstrecke P_1P_2. Zu jedem Punkte P gehört dann eine ganz bestimmte Zahl, nämlich sein Teilverhältnis, und zwar ist dasselbe positiv für alle Punkte zwischen P_1 und P_2, weil dann P_1P und PP_2 gleichgerichtet sind, und negativ für alle Punkte aufserhalb der Fundamentalstrecke, weil dann immer P_1P und PP_2 entgegengesetzte Richtung haben. Sehen wir

nun zu, wie sich das Teilverhältnis $\frac{P_1 P}{P P_2}$, welches wir kurz mit λ bezeichnen wollen, ändert, wenn P die unendliche Gerade durchläuft.

Befindet sich P in P_1, so ist offenbar sein Teilverhältnis $\lambda = 0$. Bewegt sich dann P von P_1 bis zum Mittelpunkte M der Fundamentalstrecke, so wird λ allmählich gröfser und erreicht in M den Wert $+ 1$. Geht P über M hinaus bis zu P_2, so wächst λ über alle Grenzen; für P_2 selbst ist daher $\lambda = + \infty$ zu setzen. Würde sich P von der entgegengesetzten Seite her dem Punkte P_2 genähert haben, so hätte λ immer gröfsere und gröfsere negative Werte angenommen, sodafs dem Punkte P_2 dann das Teilverhältnis $- \infty$ zuzusprechen wäre. (Man vergleiche damit das Verhalten von tg α für $\alpha = 90^0$.)

Für alle Punkte aufserhalb der Fundamentalstrecke ist λ, wie schon bemerkt, negativ und zwar erkennt man, dafs wenn P aufserhalb und auf der Seite von P_2 liegt, λ sich zwischen $- \infty$ und $- 1$ befindet, dafs dagegen, wenn P aufserhalb und auf der Seite von P_1 liegt, λ allemal Werte zwischen 0 und $- 1$ besitzt. Es fragt sich noch, welchem Werte nähert sich λ, wenn P nach der einen oder der andern Seite der Geraden sich ins Unendliche bewegt? Da:

$$P_1 P = P_1 P_2 - P P_2$$

ist, so folgt:

$$\lambda = \frac{P_1 P}{P P_2} = - 1 + \frac{P_1 P_2}{P P_2}.$$

Mag sich nun P nach der einen oder der andern Seite hin ins Unendliche bewegen, so wird $\frac{P_1 P_2}{P P_2}$ sich immer mehr und mehr der Null nähern, sodafs wir in beiden Fällen den Grenzwert $- 1$ für λ erhalten.

Wir wählen daher die Ausdrucksweise, die Gerade besitze einen einzigen unendlich fernen Punkt, dem man sich in der einen oder der andern Richtung nähern kann, und welchem das Teilverhältnis $- 1$ zukommt. Betrachtet man dann der Gleichförmigkeit des Ausdrucks wegen auch die beiden Grenzwerte $+ \infty$ und $- \infty$, die wir für das Teilverhältnis von P_2 erhalten haben, als zusammenfallend, so ergiebt sich der folgende Satz:

Jedem Punkte P der Geraden entspricht eine ganz bestimmte (positive oder negative) Zahl, nämlich sein Teilverhältnis und umgekehrt, jeder (positiven oder negativen) Zahl entspricht ein ganz bestimmter Punkt der Geraden, nämlich derjenige, dessen Teilverhältnis gleich der gegebenen Zahl ist.

Die Gleichung $\lambda = -1 + \frac{P_1 P_2}{P P_2}$ liefert nämlich zu jedem λ ein ganz bestimmtes $PP_2 = \frac{P_1 P_2}{1 + \lambda}$ und damit auch einen ganz bestimmten Punkt P, sodafs auch die Umkehrung gerechtfertigt ist.

Der Vollständigkeit halber stellen wir diese Verhältnisse noch durch folgende Tabelle zusammen:

Bewegt sich P	so bewegt sich λ
von P_1 bis M	von 0 bis $+1$
„ M „ P_2	„ $+1$ „ $+\infty$
„ P_2 „ ∞	„ $-\infty$ „ -1
„ ∞ „ P_1	„ -1 „ 0.

Wählt man, wie in § 1, einen beliebigen Anfangspunkt O und nennt die Abscissen der drei Punkte P_1, P_2 und P resp. x_1, x_2 und x, so ist $P_1 P = x - x_1$, $PP_2 = x_2 - x$, folglich $\lambda = \frac{P_1 P}{P P_2} = \frac{x - x_1}{x_2 - x}$, woraus man für die Abscisse von P findet:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}.$$

Aufg. 1. Konstruiere die Punkte mit den Teilverhältnissen 2, $\frac{1}{3}$, -3, $-\frac{1}{5}$, $-\frac{5}{2}$.

Aufg. 2. Man zeige, dafs das Teilverhältnis λ eines Punktes P unabhängig ist von der gewählten Längeneinheit und unabhängig davon, wie man die positive Richtung der Geraden fixiert.

Aufg. 3. Bestimme aus den Abscissen x_1 und x_2 von P_1 und P_2 die Abscissen der Punkte mit den Teilverhältnissen 0, 1, -1, ∞, $\frac{2}{3}$, 2, -2, $-\frac{1}{2}$ und gieb die Lage dieser Punkte an.

§ 4. Doppelverhältnis. Harmonische Punkte.

Bei vielen Gelegenheiten ist es erforderlich, gleichzeitig die Teilverhältnisse zweier Punkte ins Auge zu fassen. Seien also zwei Punkte S_1 und S_2 gegeben, welche mit einer Fundamentalstrecke $P_1 P_2$ resp. die Teilverhältnisse:

$$\lambda_1 = \frac{P_1 S_1}{S_1 P_2} \quad \text{und} \quad \lambda_2 = \frac{P_1 S_2}{S_2 P_2}$$

bilden.

Man nennt dann den Quotienten $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ das Doppelverhältnis der vier Punkte P_1, P_2, S_1, S_2. Dasselbe ist positiv, wenn S_1 und S_2 entweder zugleich innerhalb oder zugleich aufserhalb der Fundamentalstrecke $P_1 P_2$ liegen, dagegen negativ, wenn von den beiden Punkten S_1 und S_2 der eine innerhalb, der andere aufserhalb von $P_1 P_2$ liegt. Wir wollen für das Doppelverhältnis $\frac{P_1 S_1}{S_1 P_2} : \frac{P_1 S_2}{S_2 P_2}$ die Bezeichnung $(P_1 P_2 S_1 S_2)$ wählen, dabei aber genau auf die Reihenfolge achten, in der die vier Buchstaben auf einander folgen. In der Bezeichnung $(P_1 P_2 S_1 S_2)$ bedeutet also der erste Buchstabe den Anfangspunkt, der zweite den Endpunkt der Fundamentalstrecke, der dritte Buchstabe den ersten Teilpunkt und der vierte den zweiten Teilpunkt. Wählt man demnach auf der Geraden vier beliebige Punkte A, B, C, D, so bedeutet $(ABCD)$ das Doppelverhältnis $\frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB}$, während beispielsweise $(BCAD)$ das Doppelverhältnis $\frac{BA}{AC} : \frac{BD}{DC}$ bedeuten würde, welches man erhält, wenn man die Fundamentalstrecke BC das eine Mal durch A, das andere Mal durch D teilt.

Da man vier Buchstaben auf 24 verschiedene Arten auf einander folgen lassen kann, so geben vier Punkte zu 24 Doppelverhältnissen Veranlassung, die aber nicht alle von einander verschieden sind.

Von besonderer Wichtigkeit ist der Fall, wo die vier Punkte A, B, C, D so liegen, dafs ihr Doppelverhältnis $(ABCD) = -1$ ist. In diesem Falle sagt man, die vier Punkte bilden eine harmonische Gruppe oder sind har-

monische Punkte. Man nennt überdies A und B einerseits, C und D andrerseits zugeordnete Punkte und erkennt, dafs die beiden Paare A, B und C, D einander trennen, in dem Sinne, dafs wenn ein Punkt eines Paares im Innern der von dem andern Paare gebildeten Strecke liegt, der zugeordnete Punkt notwendig aufserhalb derselben sich befinden mufs.

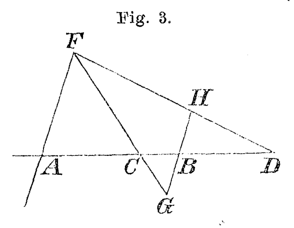
Ist $(ABCD) = -1$, so findet man durch Ausrechnen, dafs auch:

$$(ABDC) = (BACD) = (BADC) = (CDAB) = (CDBA) \\ = (DCAB) = (DCBA) = -1$$

ist. Bilden also A, B, C, D eine harmonische Gruppe, in dem Sinne, dafs zunächst $(ABCD) = -1$ ist, so kann man nicht nur jeden Punkt mit dem ihm zugeordneten vertauschen, sondern auch die beiden Paare zugeordneter Punkte mit einander und erhält immer wieder eine harmonische Gruppe. Es kommt also bei der Bildung einer solchen nur darauf an, welche Punkte einander zugeordnet werden, nicht aber welches Paar oder welcher von zwei zugeordneten Punkten eines Paares vorangestellt wird. Man sagt daher auch, das Punktepaar A, B werde durch das Punktepaar C, D harmonisch getrennt und erkennt, dafs dann auch A, B durch D, C, oder C, D durch B, A etc. harmonisch getrennt werden.

Ist ein Paar zugeordneter Punkte, etwa A, B, gegeben, so gehört zu jedem Punkte C ein ganz bestimmter zugeordneter vierter harmonischer Punkt D. Um denselben zu konstruieren, ziehe man etwa durch A und B zwei beliebige Parallelen und durch C eine beliebige Transversale, welche diese Parallelen in den Punkten F und G treffen möge. Macht man dann $BH = BG$, so führt die Verbindungslinie FH zu dem vierten harmonischen Punkte D. In der That bilden C und D entgegengesetzt gleiche Teilverhältnisse mit AB.

Fig. 3.



Wir werden später noch eine andere Konstruktion kennen lernen, welche mit dem Lineal allein ausgeführt werden kann.

Schreibt man die Gleichung:

$$\frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB} = -1$$

in der Form:

$$AC \,.\, BD = AD \,.\, CB$$

und bezeichnet mit M den Mittelpunkt von AB, so folgt:

$$(AM + MC)\,(BM + MD) = (AM + MD)\,(CM + MB).$$

Berücksichtigt man aber, daſs $AM = MB = -BM$ ist, so ergiebt sich durch Ausrechnen:

$$MA^2 = MB^2 = MC \,.\, MD.$$

Umgekehrt sieht man leicht ein, daſs wenn diese Relation besteht, A, B, C, D harmonische Punkte sein müssen, denn die Gleichung liefert zu gegebenen A, B, C nur ein einziges D.

Aufg. 1. Man schreibe die 24 Doppelverhältnisse der vier Punkte A, B, C, D auf und überzeuge sich durch Ausrechnen, daſs sie in sechs Gruppen von je vier gleichen Doppelverhältnissen zerfallen.

Aufg. 2. Man zeige, daſs wenn A, B, C, D eine harmonische Gruppe bilden, die 24 Doppelverhältnisse in drei Gruppen von je acht gleichen Doppelverhältnissen zerfallen. Den drei Gruppen entsprechen die Werte -1, 2, $\frac{1}{2}$.

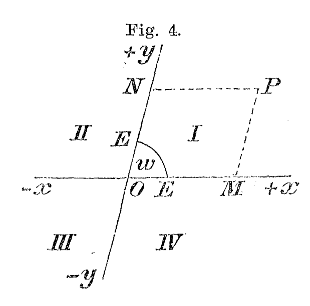
Aufg. 3. A und B seien zwei zugeordnete Punkte einer harmonischen Gruppe A, B, C, D. Man überlege an Hand der Figur und mit Rücksicht auf die Tabelle in § 3, wie sich D bewegt, wenn C die unendliche Gerade durchläuft. Wo liegt insbesondere D, wenn C mit A oder mit B oder mit dem Mittelpunkte von AB zusammenfällt?

§ 5. Bestimmung der Lage eines Punktes in der Ebene durch Koordinaten.

Bisher haben wir uns auf Punkte beschränkt, die auf einer und derselben Geraden lagen. Um nun in ähnlicher Weise auch die Lage der Punkte einer Ebene zu bestimmen, ziehen wir durch einen beliebigen Punkt O derselben zwei gerade Linien. Wir betrachten dann für die beiden Geraden im Sinne von § 1 den Punkt O als Anfangspunkt, wählen auf ihnen in derselben Entfernung von O je einen Einheitspunkt E und haben damit nicht nur für die beiden Geraden ein gemeinschaftliches Längenmaſs OE geschaffen, sondern auch zugleich

auf beiden eine positive und eine negative Richtung festgesetzt. Um die Vorstellungen zu fixieren, wollen wir die eine der beiden Geraden, die wir die Abscissenachse nennen, in horizontaler Lage voraussetzen und ihre positive Hälfte als nach rechts gerichtet annehmen. Die andere Gerade, welche die Ordinatenachse heifst, ist dann gegen die erste unter einem gewissen Winkel w geneigt, ihre positive Hälfte werde als nach oben gerichtet angenommen. Ist jetzt ein beliebiger Punkt P der Ebene gegeben, so ziehe man durch ihn zwei Parallelen PM und PN zu den Achsen. Die Lage von P ist dann vollständig durch die Lage der Punkte M und N gegeben, die wir in § 1 durch ganz bestimmte Zahlen zu fixieren gelernt haben.

Fig. 4.



Man nennt die mit ihrem Vorzeichen versehenen Achsenabschnitte OM und ON resp. die Abscisse und die Ordinate des Punktes P, beide zusammen seine Koordinaten. Die Ordinate ON von P kann man auch durch die gleiche und gleichgerichtete Strecke MP ersetzt denken, sodafs man sich die Parallele PN in der Figur sparen kann. Der Punkt O heifst der Anfangspunkt der Koordinaten, seine Koordinaten sind $= 0$.

Man bezeichnet die Abscisse eines Punktes P meistens mit dem Buchstaben x, seine Ordinate mit y und nennt dementsprechend auch die Abscissenachse die x-Achse, die Ordinatenachse die y-Achse. Sind mehrere Punkte gleichzeitig zu betrachten, so unterscheiden wir durch Indices: x, y; x_1, y_1; x_2, y_2; x', y' etc. bedeuten die Koordinaten der Punkte P; P_1; P_2; P' etc.

Wir wollen die Abscisse eines Punktes immer vor der Ordinate nennen, sodafs z. B. „der Punkt (a, b)" der Punkt mit der Abscisse a und der Ordinate b ist.

Nach diesen Vorbereitungen erkennt man jetzt die Richtigkeit des folgenden Satzes:

Jedem Punkte der unbegrenzten Ebene entspricht ein ganz bestimmtes Zahlenpaar, nämlich seine Koor-

dinaten und umgekehrt jedem Zahlenpaar entspricht ein ganz bestimmter Punkt der Ebene, nämlich derjenige, dessen Koordinaten resp. jenen beiden Zahlen gleich sind.

Durch die beiden Koordinatenachsen wird die ganze Ebene in vier Teile I, II, III, IV zerlegt. In I sind Abscisse und Ordinate eines jeden Punktes positiv, in II resp. negativ und positiv, in III beide negativ und in IV resp. positiv und negativ.

Je nachdem der von den positiven Halbachsen eingeschlossene Winkel w ein rechter ist oder nicht, spricht man von rechtwinkligen oder schiefwinkligen Koordinaten; beide zusammen heifsen auch Parallelkoordinaten oder nach dem Begründer der analytischen Geometrie Cartesische Koordinaten (Cartesius 1596—1650).

Natürlich gelten alle Sätze, die sich auf schiefwinklige Systeme beziehen, auch für rechtwinklige; aber nicht umgekehrt. Wenn daher in der Folge eine Untersuchung sich speziell auf rechtwinklige Koordinaten beziehen soll, so wird dies stets besonders hervorgehoben werden, im andern Falle kann man rechtwinklige oder schiefwinklige Koordinaten der Betrachtung zu Grunde legen.

Aufg. 1.*) Bestimme die Punkte $(2, 3)$; $(-1, 4)$; $(-2, -\frac{1}{2})$; $(1, -5)$.

Aufg. 2. Durch welche Koordinaten sind die Punkte der x-Achse resp. der y-Achse ausgezeichnet?

Aufg. 3. Welche Beziehung besteht zwischen den beiden Koordinaten eines Punktes, der auf einer der beiden Geraden liegt, welche die Winkel der Achsen halbieren?

Aufg. 4. Durch welche Koordinaten sind die Punkte einer Geraden charakterisiert, welche zur x-Achse resp. y-Achse parallel ist?

Aufg. 5. Durch O sei eine beliebige Gerade gezogen. Welche Relation besteht dann zwischen den Koordinaten x_1, y_1 und x_2, y_2 zweier Punkte P_1 und P_2 dieser Geraden?

---

*) Bei den Zeichnungen, die zu allen Aufgaben anzufertigen sind, bedient man sich zweckmäfsig eines in kleine Quadrate eingeteilten Papiers.

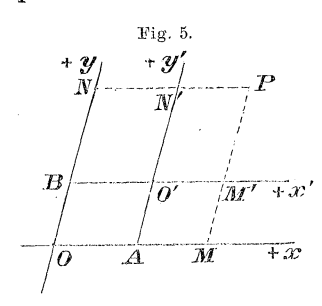
Aufg. 6. Welches ist die gegenseitige Lage der Punkte (a, b); $(-a, -b)$; $(-a, b)$; $(a, -b)$?

Aufg. 7. Ein Punkt P besitze die Koordinaten x, y. Wie heifsen seine Koordinaten, wenn man die Achsenrichtungen wechselt, oder wenn man die frühere positive x-Achse neuerdings zur positiven y-Achse und die frühere positive y-Achse neuerdings etwa zur negativen x-Achse wählt, oder wenn man die Achsen irgendwie anders vertauscht?

§ 6. Koordinatentransformation durch Verlegung des Anfangspunktes. (Parallelverschiebung.)

In einem beliebigen Koordinatensystem mit dem Anfangspunkte O seien zwei Punkte P und O' mit den Koordinaten x, y resp. a, b gegeben. Man lege durch O' ein neues Koordinatensystem, dessen positive Halbachsen parallel und gleichgerichtet mit den positiven Halbachsen des alten Systems sind, sodafs das eine System mit dem andern nach Lage und Richtung der Halbachsen durch blofse Parallelverschiebung zur Deckung gebracht werden kann. Der Punkt P besitzt dann in Bezug auf das neue System zwei Koordinaten $O'M'$ und $O'N'$, die mit x' und y' bezeichnet werden mögen. Dem entsprechend wollen wir die neuen durch O' gehenden Achsen auch die x'-Achse und y'-Achse nennen. Aus der Figur entnimmt man dann, da in Bezug auf Gröfse und Richtung $O'M' = AM = OM - OA$ und $O'N' = BN = ON - OB$ ist, die Relationen:

Fig. 5.



$$x' = x - a, \quad y' = y - b$$

oder:

$$x = x' + a, \quad y = y' + b.$$

Aufg. Man überzeuge sich, dafs diese Relationen zwischen den alten und den neuen Koordinaten stets gelten, in welchen der vier Teile der Ebene auch O' und P liegen und welche gegenseitige Lage sie auch zu einander haben mögen.

§ 7. Polarkoordinaten.

In Bezug auf ein rechtwinkliges Achsenkreuz sei ein Punkt P durch seine Koordinaten $OM = x$, $ON = y$ gegeben. (In der Figur sind absichtlich zwei Punkte mit denselben Bezeichnungen gewählt, damit man erkenne, dafs die folgenden Erörterungen von der speziellen Lage des Punktes ganz unabhängig sind. Der Leser möge also den einen oder den andern der beiden Punkte der Betrachtung zu Grunde legen.)

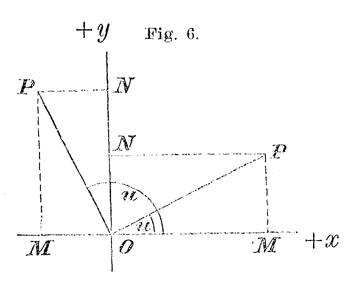


Fig. 6.

In dem rechtwinkligen Dreieck OMP sind die beiden Katheten $OM = x$, $MP = y$; die Hypotenuse, also die Entfernung des Punktes P vom Anfangspunkte, werde mit r und der Winkel, welchen r mit der positiven x-Achse einschliefst, mit u bezeichnet. Dabei wollen wir genauer unter u den Winkel verstehen, um den sich die positive x-Achse im positiven Sinne drehen mufs, um mit dem Halbstrahl OP zusammenzufallen. Unter dem positiven Drehungssinne verstehen wir dabei ein für allemal denjenigen, um welchen die positive x-Achse um den Anfangspunkt O sich drehen mufs, um, den ersten Quadranten durchstreichend, nach der positiven y-Achse zu gelangen.

Aus dem rechtwinkligen Dreieck OMP folgt jetzt:

(1) $$x = r \cos u, \quad y = r \sin u$$

und diese Gleichungen gelten, in welchem der vier Quadranten auch P angenommen werde, wenn man nur berücksichtigt, dafs $\cos u$ und $\sin u$ in den vier verschiedenen Quadranten dieselben Vorzeichenkombinationen darbieten, wie x und y.

Die Entfernung r werde dabei stets als positiv angesehen. Aus den Gleichungen (1) ergiebt sich durch Auflösen:

(2) $$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \cos u = \frac{x}{r}, \quad \sin u = \frac{y}{r}, \quad \operatorname{tg} u = \frac{y}{x},$$

wie auch unmittelbar die Figur zeigt.

Man nennt r und u die Polarkoordinaten von P, speziell r den Radius Vector, u die Anomalie von P. Die Gröfsen r und u bestimmen die Lage von P ebenso eindeutig,

wie x und y. Es folgt dies direkt aus der Figur, aber auch daraus, dafs sich vermöge der Gleichungen (1) und (2) x und y durch r und u und umgekehrt in eindeutiger Weise bestimmen lassen. Der Radius r kann alle Werte von 0 bis ∞ annehmen, die Anomalie u alle Werte von 0^0 bis 360^0.

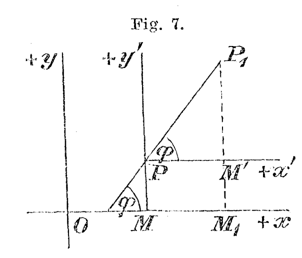
Aufg. 1. Welches sind die Polarkoordinaten der Punkte (2, 0); (0, 3); (— 4, 0); (0, — 1); (3, — 3); (1, 1); (— 2, 2)?

Aufg. 2. Welches sind die rechtwinkligen Koordinaten der Punkte, deren Polarkoordinaten resp. $r = 1$, $u = 45^0$; $r = 3$, $u = 210^0$; $r = 2$, $u = 315^0$ sind?

§ 8. Aus den rechtwinkligen Koordinaten zweier Punkte P und P_1 ihre Entfernung und die Neigung ihrer Verbindungslinie gegen die x-Achse zu bestimmen.

Die als positiv gedachte Entfernung PP_1 werde mit d bezeichnet, der Winkel, den PP_1 mit der positiven Richtung der x-Achse bildet, mit φ. Dabei wollen wir genauer unter dem Winkel, den eine Gerade mit der positiven Richtung der x-Achse bildet, und der also die Richtung der Geraden bestimmt, denjenigen Winkel verstehen, welchen die x-Achse, im positiven Sinne um ihren Schnittpunkt mit der Geraden sich drehend, beschreiben mufs, um in die Lage jener Geraden zu gelangen.

Fig. 7.



Wir legen durch P als Anfangspunkt ein neues Koordinatensystem parallel und gleichgerichtet mit dem alten (§ 6).

Sind dann x, y und x_1, y_1 die gegebenen auf das alte System bezogenen Koordinaten von P und P_1, so werden jetzt die Koordinaten von P_1 in Bezug auf das neue System lauten:

$$x' = x_1 - x, \quad y' = y_1 - y.$$

Da aber jetzt gleichzeitig die zu bestimmenden Gröfsen d und φ im Sinne von § 7 die Polarkoordinaten von P_1 in Bezug auf das neue System sind*), so ist:

*) Nach der vorhergehenden Festsetzung bedeutet φ immer einen Winkel zwischen 0^0 und 180^0. Unter Umständen ist daher die Anomalie

$$d = \sqrt{x'^2 + y'^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y'}{x'}, \quad \text{folglich:}$$

$$d = \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y_1 - y}{x_1 - x}.$$

Durch diese Formeln werden mit Berücksichtigung der für φ getroffenen Festsetzung d und φ eindeutig bestimmt. Zu beachten ist noch, dafs die Formeln sich nicht ändern, wenn man x_1, y_1 resp. mit x, y vertauscht; es ist daher gleichgültig, welchen der beiden Punkte man als ersten betrachtet.

Aufg. 1. Man bestimme die Entfernung der beiden Punkte $(5, -3)$; $(-2, 1)$ und den Winkel φ ihrer Verbindungslinie.

Aufg. 2. Die Koordinaten der Ecken eines Dreiecks seien $(2, 1)$; $(-5, 3)$; $(1, -4)$. Man bestimme die Längen und die Richtungen der drei Seiten.

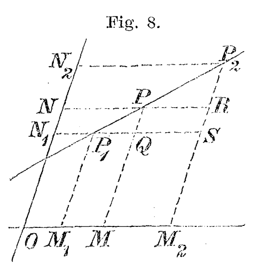
Aufg. 3. (x_1, y_1) und (x_2, y_2) seien zwei feste Punkte. Welche Gleichung mufs zwischen den Koordinaten x, y eines Punktes bestehen, damit derselbe von jenen beiden Punkten gleiche Abstände habe? Wo liegen alle diese Punkte?

Aufg. 4. Auf der x-Achse seien die beiden Punkte A und A' mit den Abscissen a und $-a$, auf der y-Achse B und B' mit den Ordinaten b und $-b$ gegeben. Man bestimme die Richtungen der Seiten des Parallelogramms $ABA'B'$.

§ 9. Aus den gegebenen Koordinaten x_1, y_1 und x_2, y_2 zweier Punkte P_1 und P_2 die Koordinaten x, y desjenigen Punktes P der Verbindungslinie zu finden, der mit der Strecke P_1P_2 ein gegebenes Teilverhältnis λ bildet.

Da das Teilverhältnis λ unabhängig davon ist, welche Richtung der Geraden P_1P_2 man als die positive ansieht (§ 3, Aufg. 2), so wollen wir uns einer besonderen Festsetzung darüber enthalten und nur in Rücksicht ziehen, dafs Strecken, die in entgegengesetztem Sinne durchlaufen werden (wie etwa P_1P_2 und P_2P_1) mit entgegengesetzten Zeichen zu versehen sind.

Fig. 8.



von P_1 in Bezug auf das neue System nicht φ, sondern $180^0 + \varphi$; da aber $\operatorname{tg}(180^0 + \varphi) = \operatorname{tg} \varphi$ ist, so gelten die Formeln für d und $\operatorname{tg} \varphi$ doch ganz allgemein.

Nur für die Geraden, die einer der Achsen parallel sind, ist die positive Richtung nicht willkürlich, sondern in Übereinstimmung mit der betreffenden Achsenrichtung zu wählen.

Eine aufmerksame Betrachtung der Figur zeigt nun, daſs mit Rücksicht sowohl auf die absoluten Längen wie auf die Vorzeichen der betreffenden Strecken die Proportion gilt:

$$P_1P : PP_2 = M_1M : MM_2 = N_1N : NN_2$$

d. h. daſs M_1M_2 durch M und N_1N_2 durch N in demselben Teilverhältnis λ geteilt werden, wie P_1P_2 durch P. Nach § 3 ist dann aber das x von M gleich $\frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$ und dem entsprechend das y von N gleich $\frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$. Es sind daher die Koordinaten von P:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

Für $\lambda = 1$ erhält man die Koordinaten des Mittelpunktes der Strecke P_1P_2, nämlich $\frac{x_1 + x_2}{2}$, $\frac{y_1 + y_2}{2}$.

Aufg. 1. Man bestimme die Teilverhältnisse der beiden Punkte, in denen die Gerade P_1P_2 die Achsen schneidet.

Aufg. 2. Ein Dreieck ist gegeben durch die Koordinaten (2, 5); (— 3, 7); (1, — 2) seiner Ecken. Man bestimme die Koordinaten der Mittelpunkte der Seiten.

Aufg. 3. Der Schwerpunkt S einer Dreiecksfläche teilt die Verbindungslinie P_1R_1 einer Ecke P_1 mit dem Mittelpunkte R_1 der Gegenseite bekanntlich in dem Verhältnis 2 : 1. Man soll die Koordinaten von S aus den Koordinaten x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3 von P_1, P_2, P_3 berechnen.

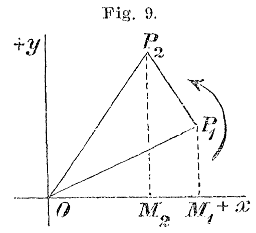
Aufg. 4. Man suche für das Dreieck (2, — 5); (1, 2); (— 3, 4) die Koordinaten des Punktes, in welchem sich die Verbindungslinien der Ecken mit den Mittelpunkten der Gegenseiten, die sogenannten Mittellinien, treffen. (Der gesuchte Punkt ist der Schwerpunkt.)

Aufg. 5. Durch die Ecken (x_1, y_1); (x_2, y_2); (x_3, y_3) eines Dreiecks ziehe man Parallelen zu den Gegenseiten und bestimme die Koordinaten der Ecken des so entstehenden Dreiecks.

§ 10. **Den Inhalt des Dreiecks zu bestimmen, welches der Anfangspunkt mit zwei Punkten P_1 und P_2 bildet.**

Die Punkte P_1 und P_2 mögen die rechtwinkligen Koordinaten x_1, y_1; x_2, y_2 und die Polarkoordinaten r_1, u_1; r_2, u_2 besitzen. Sei zunächst $u_2 > u_1$, sodafs die Punkte O, P_1, P_2, wie in der Figur, im positiven Drehungssinne aufeinander folgen. Dann ist der Inhalt J des Dreiecks OP_1P_2 gleich:

Fig. 9.



$$J = \tfrac{1}{2} r_1 r_2 \sin(u_2 - u_1)$$
$$= \tfrac{1}{2} r_1 r_2 (\sin u_2 \cos u_1 - \cos u_2 \sin u_1)$$

oder mit Rücksicht auf die Formeln (2) von § 7:

$$J = \tfrac{1}{2} r_1 r_2 \left(\frac{y_2}{r_2} \frac{x_1}{r_1} - \frac{x_2}{r_2} \frac{y_1}{r_1}\right)$$

d. h.:

(1) $$J = \tfrac{1}{2}(x_1 y_2 - x_2 y_1).$$

Ist dagegen $u_1 > u_2$, d. h. folgen die Punkte O, P_1, P_2 im negativen Drehungssinne aufeinander, so ist:

$$J = \tfrac{1}{2} r_1 r_2 \sin(u_1 - u_2)$$

und man erhält alsdann:

(2) $$J = \tfrac{1}{2}(x_2 y_1 - x_1 y_2) = -\tfrac{1}{2}(x_1 y_2 - x_2 y_1).$$

Um nun diese lästige Unterscheidung, ob u_2 gröfser oder kleiner ist als u_1, zu vermeiden, wollen wir ein für allemal festsetzen, dafs der Inhalt des Dreiecks OP_1P_2 (man beachte die Reihenfolge der Buchstaben) durch die einzige Formel:

(3) $$J = \tfrac{1}{2}(x_1 y_2 - x_2 y_1)$$

gegeben werde.

Diese Festsetzung enthebt uns dann aber nicht nur jener Unterscheidung, sondern sie liefert zugleich eine thatsächliche Vervollständigung unsrer Erkenntnis:

Der absolute Wert des Ausdrucks $\tfrac{1}{2}(x_1 y_2 - x_2 y_1)$ giebt uns den absoluten Flächeninhalt des in Rede stehenden Dreiecks an; gleichzeitig aber belehrt uns, ohne dafs wir nötig haben, die Figur anzuschauen, das Vorzeichen des Ausdrucks, in welchem Sinne die Punkte O, P_1, P_2 aufeinander folgen.

Ist nämlich $\frac{1}{2}(x_1 y_2 - x_2 y_1)$ positiv, so ist dies ein Zeichen dafür, dafs die Punkte O, P_1, P_2 im positiven Sinne aufeinander folgen; ist dagegen dieser Ausdruck negativ, so schliefsen wir, dafs das Dreieck im negativen Sinne durchlaufen wird, wenn wir von O über P_1 nach P_2 gelangen.

Liegen die Punkte O, P_1, P_2 in einer Geraden, so ist $x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0$ und umgekehrt.

Aufg. 1. Man zeichne verschiedene Dreiecke OP_1P_2 (mit Berücksichtigung aller Quadranten) und übe sich, das Vorzeichen der einzelnen Dreiecke jedesmal aus der Figur abzulesen. Die Dreiecke OP_2P_1 haben dann immer das entgegengesetzte Zeichen.

Aufg. 2. Zeige, dafs infolge unsrer Festsetzung der Inhalt des Dreiecks OP_2P_1 durch $\frac{1}{2}(x_2 y_1 - x_1 y_2)$ dargestellt wird.

Aufg. 3. P_1 und P_2 mögen die Koordinaten $-5, 1$ und $3, 4$ besitzen. Berechne den Inhalt des Dreiecks OP_1P_2 und diskutiere das Vorzeichen.

Aufg. 4. P_1 habe die Koordinaten $2, 3$; auf welcher Seite der Geraden OP_1 liegt der Punkt P_2 mit den Koordinaten $4, 3$?

Aufg. 5. Drücke die Bedingung dafür aus, dafs der Punkt mit den Koordinaten x, y auf der Verbindungslinie von O mit (x_1, y_1) liegt.

Aufg. 6. Beweise, dafs bei schiefwinkligen Koordinaten mit dem Achsenwinkel w der Inhalt des Dreiecks OP_1P_2 durch $\frac{1}{2}(x_1 y_2 - x_2 y_1) \sin w$ dargestellt wird. Es ist nämlich, wenn dieselben Bezeichnungen wie im Text benutzt werden:

$$\sin u_1 = \frac{y_1 \sin w}{r_1} \quad \text{etc.}$$

§ 11. Den Inhalt eines beliebigen Dreiecks $P_1P_2P_3$ aus den Koordinaten der Ecken zu berechnen.

Man verbinde die drei Punkte P_1, P_2, P_3, deren rechtwinklige Koordinaten resp. x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3 seien, mit dem Anfangspunkt O, so erhält man drei Dreiecke OP_1P_2, OP_2P_3, OP_3P_1, deren Inhalt resp. durch:

$$\tfrac{1}{2}(x_1 y_2 - x_2 y_1), \quad \tfrac{1}{2}(x_2 y_3 - x_3 y_2), \quad \tfrac{1}{2}(x_3 y_1 - x_1 y_3)$$

bestimmt ist. Nimmt man nun jedes der Dreiecke mit dem

ihm zukommenden Vorzeichen und bezeichnet den Inhalt der Dreiecke $P_1P_2P_3$, OP_1P_2, OP_2P_3, OP_3P_1 kurz mit J, J_{12}, J_{23}, J_{31}, so zeigt eine aufmerksame Betrachtung der Figur, daſs stets, wie auch das Dreieck $P_1P_2P_3$ liegen mag, die Gleichung gilt:

$$J = J_{12} + J_{23} + J_{31},$$

Fig. 10.

wenn nur die Vorzeichen richtig beachtet werden, und daſs ferner J positiv oder negativ ausfällt, je nachdem P_1, P_2, P_3 im positiven Sinne (wie bei der ersten Figur) oder im negativen Sinne (wie bei der zweiten Figur) aufeinander folgen.

Indem wir also so für den Flächeninhalt J des Dreiecks $P_1P_2P_3$ (man beachte die Reihenfolge der Buchstaben) stets die Formel erhalten:

$$J = \tfrac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_3y_1 - x_1y_3),$$

erkennen wir, daſs uns dieser Ausdruck für J nicht nur durch seinen absoluten Wert den absoluten Flächeninhalt des Dreiecks angiebt, sondern auch gleichzeitig durch sein Vorzeichen, in welchem Sinne die drei Punkte P_1, P_2, P_3 aufeinander folgen. Die in § 10 getroffene Festsetzung macht also unsere Formeln inhaltsreicher.

Anmerkung. Bei dem Bau der für J gefundenen Formel tritt eine gewisse Gesetzmäſsigkeit zu Tage, der wir noch vielfach begegnen werden und die namentlich auch für das Gedächtnis eine Erleichterung bietet. Man bemerkt nämlich, daſs die beiden Summanden $x_2y_3 - x_3y_2$ und $x_3y_1 - x_1y_3$ dadurch aus dem ersten Summanden $x_1y_2 - x_2y_1$ hervorgehen, daſs man die Indices 1, 2, 3 durch 2, 3, 1 beziehungsweise 3, 1, 2 ersetzt. Die nebenstehende Figur rechtfertigt die Bezeichnung „cyklische Vertauschung“ der Indices.

Fig. 11.

Aufg. 1. Man leite die Formel für J dadurch ab, daſs man durch P_3 ein neues Achsensystem parallel und gleichgerichtet mit dem alten einführt und dann auf die neuen

Koordinaten $x_1' = x_1 - x_3$, $y_1' = y_1 - y_3$ und $x_2' = x_2 - x_3$, $y_2' = y_2 - y_3$ von P_1 und P_2 die Formel $J = \frac{1}{2}(x_1' y_2' - x_2' y_1')$ anwendet.

Aufg. 2. Man lege durch einen beliebigen Punkt O' mit den Koordinaten a, b ein neues Achsensystem parallel und gleichgerichtet mit dem alten und beweise, dafs in dem neuen System die Formel für J genau denselben Flächeninhalt ergiebt wie in dem alten, dafs dieselbe also von dem Koordinatensystem unabhängig ist.

Aufg. 3. Man bestimme den Inhalt des Dreiecks (3, 1); (4, — 2); (— 1, — 2) und diskutiere das Vorzeichen.

Aufg. 4. Man überzeuge sich, dafs die Dreiecke $P_2 P_3 P_1$ und $P_3 P_1 P_2$ dasselbe Vorzeichen haben wie $P_1 P_2 P_3$, dafs dagegen den Dreiecken $P_1 P_3 P_2$, $P_2 P_1 P_3$, $P_3 P_2 P_1$ das entgegengesetzte Zeichen zukommt.

Aufg. 5. Welche Bedingung mufs zwischen den Koordinaten der drei Punkte P_1, P_2, P_3 stattfinden, damit diese in einer Geraden liegen?

Aufg. 6. Beweise, dafs für schiefwinklige Koordinaten der Inhalt des Dreiecks $P_1 P_2 P_3$ durch:

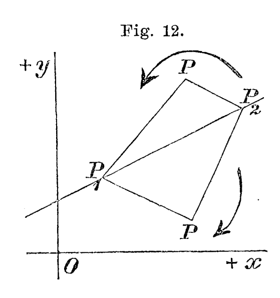
$$\frac{1}{2}(x_1 y_2 - x_2 y_1 + x_2 y_3 - x_3 y_2 + x_3 y_1 - x_1 y_3) \sin w$$

ausgedrückt wird (§ 10, Aufg. 6).

§ 12. Folgerungen. Kriterien für die Lage eines Punktes in Bezug auf eine Gerade.

In einem rechtwinkligen Koordinatensystem sei eine Gerade durch die beiden Punkte P_1, P_2 gegeben. Dieselbe zerlegt dann die ganze Ebene in zwei Teile, die wir auf Grund unsrer Festsetzungen in folgender Weise von einander zu unterscheiden im Stande sind. Alle Punkte P auf der einen Seite der Geraden sind dadurch ausgezeichnet, dafs in dem zugehörigen Dreieck die Ecken P_1, P_2, P im positiven Sinne, alle Punkte P auf der andern Seite der Geraden dadurch, dafs in dem zugehörigen Dreieck die Ecken

Fig. 12.



P_1, P_2, P im negativen Sinne aufeinander folgen. Wählen wir daher auf der ersten Seite, die wir kurz die positive nennen wollen, einen beliebigen Punkt P mit den Koordinaten x, y und bilden (indem wir jetzt x_3, y_3 durch x, y ersetzen) den Ausdruck:

$$J = \tfrac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y - xy_2 + xy_1 - x_1y),$$

so wird dieser Ausdruck allemal positiv ausfallen; nehmen wir dagegen einen Punkt P mit den Koordinaten x, y auf der andern Seite, die wir als die negative bezeichnen können, so wird der entsprechende Ausdruck stets mit dem negativen Zeichen behaftet sein. Wir besitzen also in dem Ausdruck:

$$x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y - xy_2 + xy_1 - x_1y,$$

dem wir auch die Form:

$$x(y_1 - y_2) - y(x_1 - x_2) + x_1y_2 - x_2y_1$$

geben können, ein wichtiges Unterscheidungsmittel für die beiden Seiten der Geraden P_1P_2. Für jedes Wertepaar x, y nimmt der charakteristische Ausdruck einen ganz bestimmten Wert an und zwar einen positiven für alle Punkte der einen Seite, einen negativen für alle Punkte der andern Seite. Bedeutet (x, y) einen Punkt der Geraden P_1P_2 selbst, so wird der Ausdruck (der ja den doppelten Flächeninhalt des entsprechenden Dreiecks darstellt) allemal Null, und umgekehrt, wenn der Ausdruck gleich Null wird, so ist dies ein sicheres Zeichen dafür, dafs der Punkt (x, y) auf der Geraden liegt.

Es ist daher:

$$x(y_1 - y_2) - y(x_1 - x_2) + x_1y_2 - x_2y_1 = 0$$

eine Gleichung, welche allemal aber auch nur dann erfüllt wird, wenn x, y die Koordinaten eines Punktes der Geraden bedeuten.

Aufg. 1. Beweise, dafs der zuletzt ausgesprochene Satz auch unverändert für schiefwinklige Koordinaten gilt.

Aufg. 2. P_1, P_2, P mögen die rechtwinkligen Koordinaten 2, 5; — 3, 4; 1, 1 haben. Auf welcher Seite der Geraden P_1P_2 liegt der Punkt P? Liegt der Anfangspunkt O auf derselben Seite?

Aufg. 3. Prüfe, ob die Punkte (1, — 1); (— 2, 5); (7, — 6);

$(\frac{1}{2}, -2)$ auf der Geraden P_1P_2 der vorhergehenden Aufgabe liegen.

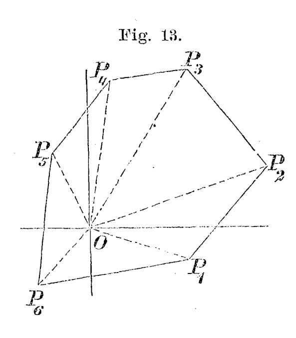
Aufg. 4. In welchen Punkten trifft dieselbe Gerade P_1P_2 die Achsen und die Winkelhalbierenden derselben? (§ 5, Aufg. 2 und 3).

Aufg. 5. Welcher Gleichung genügen die Koordinaten eines jeden Punktes der Geraden P_1P_2, wenn P_1 und P_2 resp. die Koordinaten 4, 2 und -3, 7 haben?

§ 13. Den Inhalt eines Vielecks aus den Koordinaten seiner Ecken zu berechnen.

Die n Ecken P_1, P_2, $\ldots P_n$ mögen die rechtwinkligen Koordinaten $x_1, y_1;\ x_2, y_2; \ldots . x_n, y_n$ besitzen. Verbindet man, wie in § 11, die n Eckpunkte mit dem Anfangspunkt O, so erhält man n Dreiecke OP_1P_2, OP_2P_3, $\ldots OP_nP_1$. Bei genauer Berücksichtigung der Vorzeichen aller dieser Dreiecke ergiebt sich als einfache Ausdehnung der in § 11 gewonnenen Resultate für den Inhalt J die Gleichung:

Fig. 13.



$$J = OP_1P_2 + OP_2P_3 + \cdots + OP_nP_1$$

d. h.:

$$J = \tfrac{1}{2}\{x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_3 - x_3y_2 + \cdots + x_{n-1}y_n - x_ny_{n-1} + x_ny_1 - x_1y_n\}$$

und zwar ist dieser Ausdruck positiv oder negativ, je nachdem die Punkte P_1, P_2, $\ldots P_n$ im positiven oder im negativen Sinne aufeinander folgen. Die für J gefundene Formel bleibt bestehen, auch wenn das Vieleck einspringende Ecken hat oder ein überschlagenes ist.

Aufg. 1. Man beweise (wie § 11, Aufg. 2), dafs die Formel für J von dem Koordinatensystem unabhängig ist.

Aufg. 2. Bestimme den Inhalt des Vierecks (1, 2); $(-3, 4)$; $(-1, -1)$; $(3, -2)$.

Aufg. 3. Beweise, dafs für schiefwinklige Koordinaten in dem Ausdruck für J einfach der Faktor $\sin w$ hinzutritt.

Aufg. 4. Bestimme für schiefwinklige Koordinaten ($w = 60^0$) den Inhalt des Vierecks (2, 1); (4, —3); (—2, —5); (—1, 4).

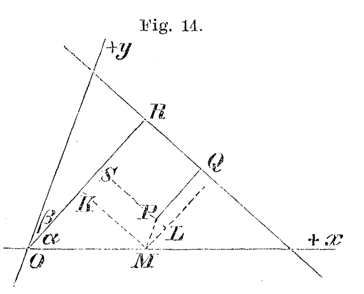
Aufg. 5. Bestimme für rechtwinklige Koordinatenachsen den Inhalt des Achtecks:

$$(1, 0); \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right); (0, 1); \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right); (-1, 0);$$
$$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right); (0, -1); \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Aufg. 6. In einem (rechtwinkligen oder schiefwinkligen) Koordinatensystem sei ein beliebiges Polygon $P_1 P_2 \ldots P_n$ gegeben. Man lasse die Abscissen der n Ecken ungeändert, verkürze aber sämtliche Ordinaten in demselben Verhältnis $a : b$. Dadurch erhält man ein neues Polygon $P_1' P_2' \ldots P_n'$. Wendet man auf dieses neue Polygon die Formel des Textes an und berücksichtigt, dafs die neuen Ordinaten aus den entsprechenden alten durch Multiplikation mit $\frac{b}{a}$ hervorgehen, so tritt der Faktor $\frac{b}{a}$ vor die Klammer und man findet, dafs der Inhalt des alten Polygons sich zu dem des neuen verhält wie $a : b$. Wir werden davon später eine wichtige Anwendung machen.

§ 14. Bestimmung des Abstandes eines Punktes von einer Geraden.

Die Lage einer Geraden ist vollständig bestimmt, wenn man ihren Abstand δ vom Anfangspunkte eines beliebigen Koordinatensystems und den Winkel α kennt, welchen δ mit der positiven Richtung der x-Achse einschliefst. Unter α verstehen wir dabei genauer den Winkel, um den sich die positive x-Achse im positiven Sinne drehen mufs, um mit dem durch die Richtung von $OR = \delta$ bestimmten Halbstrahle zusammenzufallen. Der Abstand δ, den wir stets als positiv ansehen, schliefst dann mit der positiven



y-Achse den Winkel $\beta = w - \alpha$ ein, insofern w den Achsenwinkel bedeutet.

In der Figur ist PQ der zu bestimmende Abstand d des gegebenen Punktes P mit den Koordinaten x, y von der durch δ und α bestimmten Geraden. Man liest dann unmittelbar die Relation $d = OR - OS = \delta - OS$ ab. Nun ist:

$$OS = OK + KS = OK + ML.$$

Aus den rechtwinkligen Dreiecken OMK mit dem Winkel α bei O und MLP mit dem Winkel β bei M folgt dann aber:

$$OK = OM \cos\alpha = x \cos\alpha,$$

$$ML = MP \cos\beta = y \cos\beta,$$

also:

$$OS = x \cos\alpha + y \cos\beta$$

und daher:

(1) $$d = -(x \cos\alpha + y \cos\beta - \delta).$$

Hätten wir in der Figur den Punkt P auf der andern Seite der Geraden gewählt, so wäre bei analoger Bezeichnung $d = OS - OR$ und wir hätten dann die Formel:

(2) $$d = +(x \cos\alpha + y \cos\beta - \delta)$$

erhalten.

Um nun diese Unterscheidungen zu vermeiden, wollen wir ein für allemal festsetzen, daſs der Abstand eines Punktes P mit den Koordinaten x, y von der durch δ und α charakterisierten Geraden durch die einzige Formel:

(3) $$d = -(x \cos\alpha + y \cos\beta - \delta)$$

gegeben werde. Auch hier enthebt uns diese Festsetzung nicht nur jener lästigen Unterscheidung, sondern sie macht auch die Formel inhaltsreicher: durch den absoluten Wert von d erhalten wir die absolute Länge des gesuchten Abstandes, gleichzeitig aber giebt uns das Vorzeichen von d an, auf welcher Seite der Geraden der Punkt P liegt. Ist d positiv, so befindet sich P auf derselben Seite wie der Anfangspunkt O, die von P und O gefällten Lote d und δ sind dann gleichgerichtet; ist d dagegen negativ, so liegt P auf der entgegen-

gesetzten Seite, d und δ sind entgegengesetzt gerichtet. Die Gerade trennt also die Punkte, für welche der Ausdruck:

$$d = -(x \cos \alpha + y \cos \beta - \delta)$$

einen positiven Wert besitzt, von denjenigen, für welche er einen negativen Wert annimmt.

Die Punkte der Geraden selbst und nur diese sind durch $d = 0$ ausgezeichnet. Der Ausdruck $x \cos \alpha + y \cos \beta - \delta$ verschwindet daher jedesmal aber auch nur dann, wenn x, y die Koordinaten eines Punktes der Geraden sind oder:

Die Gleichung $x \cos \alpha + y \cos \beta - \delta = 0$ ist eine Gleichung, welche von den Koordinaten x, y eines jeden Punktes der Geraden aber auch nur von solchen erfüllt wird.

Ist das Koordinatensystem rechtwinklig, also $\beta = 90^0 - \alpha$, so ist $d = -(x \cos \alpha + y \sin \alpha - \delta)$, und die eben besprochene charakteristische Gleichung lautet dann:

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - \delta = 0.$$

Aufg. 1. In einem rechtwinkligen System sei eine Gerade durch $\delta = 2$, $\cos \alpha = \frac{4}{5}$, $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ bestimmt. Welchen Abstand von ihr hat der Punkt $(-3, 5)$? Interpretiere das Zeichen.

Aufg. 2. Welcher Gleichung genügen die Koordinaten eines jeden Punktes der vorhergehenden Geraden?

Aufg. 3. Liegen die Punkte $(1, 1)$; $(-2, 6)$; $(3, -2)$ auf der Geraden?

Aufg. 4. In welchen Punkten trifft die Gerade die Achsen und die beiden Winkelhalbierenden derselben?

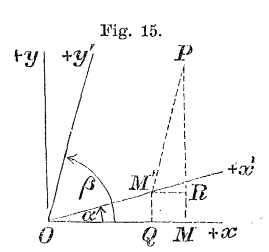
§ 15. Übergang von einem rechtwinkligen Achsensystem zu einem schiefwinkligen.

Durch den Anfangspunkt O eines rechtwinkligen Koordinatensystems seien zwei Strahlen Ox' und Oy' gezogen, welche wir als die positiven Richtungen eines schiefwinkligen Koordinatensystems auffassen wollen. Ox' und Oy' mögen mit der positiven Richtung der x-Achse die Winkel α und β bilden.

Die Koordinaten eines beliebigen Punktes P seien in Bezug auf das rechtwinklige System $OM = x$, $MP = y$, in Bezug

auf das schiefwinklige System $OM' = x'$, $M'P = y'$. Man soll den Zusammenhang zwischen den rechtwinkligen und den schiefwinkligen Koordinaten von P angeben. Aus der Figur folgt:

Fig. 15.



$$x = OM = OQ + QM = OQ + M'R,$$
$$y = MP = MR + RP = QM' + RP.$$

Die rechtwinkligen Dreiecke OQM' mit dem Winkel α bei O und $M'RP$ mit dem Winkel β bei M' lassen aber erkennen, dafs:

$$OQ = x' \cos \alpha, \quad QM' = x' \sin \alpha,$$
$$M'R = y' \cos \beta, \quad RP = y' \sin \beta$$

ist. Es ergeben sich daher die Transformationsformeln:

$$(1) \qquad \begin{aligned} x &= x' \cos \alpha + y' \cos \beta, \\ y &= x' \sin \alpha + y' \sin \beta. \end{aligned}$$

Für $\beta = 90^0 + \alpha$ ist das System Ox', Oy' auch ein rechtwinkliges und man erhält dann:

$$(2) \qquad \begin{aligned} x &= x' \cos \alpha - y' \sin \alpha, \\ y &= x' \sin \alpha + y' \cos \alpha. \end{aligned}$$

Aufg. 1. In einem rechtwinkligen Achsensystem mögen die Koordinaten eines Punktes der Relation $x^2 + y^2 = r^2$ genügen. In welche andere Relation verwandelt sich diese, wenn man als neue Achsen Ox' und Oy' die Winkelhalbierenden der alten Achsen wählt? (Da $\alpha = 45^0$, so hat man einfach:

$$x = \frac{x'}{\sqrt{2}} - \frac{y'}{\sqrt{2}}, \quad y = \frac{x'}{\sqrt{2}} + \frac{y'}{\sqrt{2}}$$

zu setzen.)

Aufg. 2. In einem rechtwinkligen System mögen die Koordinaten eines Punktes der Relation $x^2 - y^2 = a^2$ genügen. In welche andere Relation verwandelt sich diese, wenn man, wie bei der vorhergehenden Aufgabe, wieder die Winkelhalbierenden als neue Achsen wählt?

Aufg. 3. In einem rechtwinkligen Achsensystem mögen die Koordinaten eines Punktes der Relation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ge-

nügen. Man wähle ein neues schiefwinkliges Achsensystem, dessen Winkel α und β durch die Relation:

$$\frac{\cos\alpha\cos\beta}{a^2} + \frac{\sin\alpha\sin\beta}{b^2} = 0$$

mit einander verbunden sind. Zeige, dafs die zwischen x und y bestehende Gleichung in $\frac{x'^2}{a'^2} + \frac{y'^2}{b'^2} = 1$ übergeht, insofern zur Abkürzung $\frac{\cos^2\alpha}{a^2} + \frac{\sin^2\alpha}{b^2} = \frac{1}{a'^2}$, $\frac{\cos^2\beta}{a^2} + \frac{\sin^2\beta}{b^2} = \frac{1}{b'^2}$ gesetzt wird.

Zweites Kapitel.

Die gerade Linie.

§ 16. Definition der Gleichung einer Geraden. Die Gerade sei bestimmt durch zwei Punkte.

Wir sahen in § 12, dafs wenn in einem rechtwinkligen Koordinatensystem eine Gerade durch zwei Punkte P_1 und P_2 gegeben ist, allemal eine Gleichung, nämlich:

(1) $$x(y_1 - y_2) - y(x_1 - x_2) + x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0$$

existiert, welche befriedigt wird von den Koordinaten x, y eines jeden Punktes P der Geraden und nur von diesen. Die geometrische Bedeutung dieses Satzes ist dabei die folgende: Die linke Seite der Gleichung stellt den doppelten Flächeninhalt des Dreiecks $P_1 P_2 P$ dar und wird daher allemal aber auch nur dann verschwinden, wenn der Punkt P auf der Geraden $P_1 P_2$ liegt. Sonst hat die linke Seite der Gleichung immer einen von Null verschiedenen Wert und zwar einen positiven für alle Punkte auf der einen, einen negativen für alle Punkte auf der andern Seite der Geraden $P_1 P_2$.

Da bei schiefwinkligen Koordinaten in der Formel für den Flächeninhalt des Dreiecks nur der Faktor $\sin w$ hinzutritt, so gelten alle auf die Gleichung (1) bezüglichen Bemerkungen auch für schiefwinklige Systeme.

Durch die Gleichung (1) werden also (bei jedem beliebigen Koordinatensystem) alle Punkte der Geraden $P_1 P_2$ scharf unter-

schieden von allen andern Punkten der Ebene; wir nennen sie daher die Gleichung der Geraden, indem wir definieren:

Unter der Gleichung einer Geraden versteht man eine Gleichung zwischen zwei Unbekannten x und y, welche erfüllt wird von den Koordinaten eines jeden Punktes der Geraden und nur von diesen.

Da jede Gerade durch zwei ihrer Punkte bestimmt werden kann, so hat also jede Gerade eine Gleichung. Es ist damit aber noch nicht gesagt, dafs jede Gerade nur eine Gleichung besitze. In der That könnten wir ja die Gerade ebenso gut durch zwei andere auf ihr gelegene Punkte P' und P'' mit den Koordinaten x', y' und x'', y'' bestimmen und erhielten als Gleichung derselben Geraden die Gleichung:

$$x(y' - y'') - y(x' - x'') + x'y'' - x''y' = 0,$$

die von (1) verschieden ist. Vorläufig werden wir daher einer jeden Geraden unzählig viele Gleichungen zusprechen müssen. Wir kommen darauf noch zurück.

Man kann die Gleichung (1) der Geraden $P_1 P_2$ auch ganz direkt ableiten. Aus der Figur des § 9 lesen wir nämlich unmittelbar für jeden Punkt P der Geraden $P_1 P_2$ und nur für einen solchen die Proportion ab:

$$QP : P_1Q = SP_2 : P_1S$$

oder:

$$(2) \qquad \frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

woraus aber durch leichte Reduktion die Gleichung (1) hervorgeht.

Aufg. 1. Wie heifst die Gleichung der durch $(2, -3)$; $(-4, 1)$ gehenden Geraden? Liegt der Punkt $(1, 4)$, oder etwa der Anfangspunkt O auf der Geraden?

Aufg. 2. Wenn P_2 mit O zusammenfällt, so heifst die Gleichung der Geraden OP_1: $xy_1 - yx_1 = 0$ oder $\frac{x}{y} = \frac{x_1}{y_1}$. Weise dies direkt nach an Hand einer Figur. (§ 5, Aufg. 5.)

Aufg. 3. Durch passende Wahl von P_1 findet man aus Aufg. 2, dafs die Gleichungen der x-Achse, der y-Achse und der beiden Winkelhalbierenden resp. sind:

$$y = 0, \quad x = 0, \quad x - y = 0, \quad x + y = 0.$$

Beweise dies direkt.

Aufg. 4. Ist $x_1 = x_2 = a$, wärend y_1 und y_2 von einander verschieden sind, so heifst die Gleichung von $P_1 P_2$: $x = a$. Ist ebenso $y_1 = y_2 = b$, $x_1 \neq x_2$, so erhält man $y = b$. Zeige dies direkt.

Aufg. 5. Ein Dreieck ist gegeben durch (2, 3); (— 4, 1); (2, — 3); wie heifsen die Gleichungen der drei Seiten?

Aufg. 6. Ein Dreieck ist gegeben durch die drei Punkte (x_1, y_1); (x_2, y_2); (x_3, y_3). Beweise, dafs die Gleichungen der drei Mittellinien lauten:

$$x(2y_1 - y_2 - y_3) - y(2x_1 - x_2 - x_3) + x_1 y_2 - x_2 y_1 + x_1 y_3 - x_3 y_1 = 0,$$
$$x(2y_2 - y_3 - y_1) - y(2x_2 - x_3 - x_1) + x_2 y_3 - x_3 y_2 + x_2 y_1 - x_1 y_2 = 0,$$
$$x(2y_3 - y_1 - y_2) - y(2x_3 - x_1 - x_2) + x_3 y_1 - x_1 y_3 + x_3 y_2 - x_2 y_3 = 0.$$

Beachte den Umstand, dafs durch Addition der drei Gleichungen die linke Seite identisch verschwindet. Beachte ferner, dafs die beiden letzten Gleichungen aus der ersten durch cyklische Vertauschung der Indices hervorgehen (§ 11).

Aufg. 7. Finde für das Dreieck von Aufg. 5 die Gleichungen der Mittellinien.

Aufg. 8. Geht die Gerade (3, 4); (— 2, — 5) durch den Anfangspunkt? Liegen die Punkte (1, 5) und (— 6, — 2) auf derselben Seite der Geraden?

§ 17. Fortsetzung. Die Gerade sei bestimmt durch ihren Abstand vom Anfangspunkt und den Winkel, den dieser mit der x-Achse bildet.

Da man ein und dieselbe Gerade auf die verschiedensten Arten bestimmen kann, so wird man auch die verschiedensten Gleichungen für dieselbe Gerade erwarten. Sei z. B. in einem beliebigen Koordinatensystem eine Gerade, wie in § 14, durch ihren Abstand δ vom Anfangspunkt und den Winkel α bestimmt, den δ mit der positiven Richtung der x-Achse einschliefst. Dann war der Abstand d eines beliebigen Punktes (x, y) von der Geraden (α, δ) gegeben durch:

$$d = -(x \cos \alpha + y \cos \beta - \delta),$$

insofern $\beta = w - \alpha$ den Winkel bedeutet, den δ mit der positiven y-Achse einschliefst. Dieser Ausdruck für d ist positiv

für alle Punkte, die auf derselben Seite der Geraden liegen, wie der Anfangspunkt, negativ für alle Punkte auf der entgegengesetzten Seite und verschwindet seiner geometrischen Bedeutung entsprechend allemal aber auch nur dann, wenn der Punkt (x, y) auf der Geraden (α, δ) liegt. Die Gleichung:

$$(1) \qquad x \cos\alpha + y \cos\beta - \delta = 0$$

ist daher als die Gleichung der Geraden (α, δ) zu bezeichnen:

Bedeuten x, y die Koordinaten eines beliebigen Punktes der Geraden, so wird die Gleichung erfüllt; bedeuten x, y dagegen die Koordinaten eines Punktes, der nicht auf der Geraden liegt, so ist die linke Seite nicht gleich Null, sondern bedeutet den mit dem entgegengesetzten Zeichen versehenen Abstand des Punktes (x, y) von der Geraden (α, δ).

Für rechtwinklige Koordinaten lautet die Gleichung der Geraden (α, δ):

$$(2) \qquad x \cos\alpha + y \sin\alpha - \delta = 0.$$

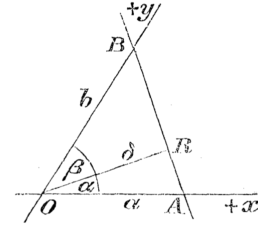
Aufg. 1. In einem rechtwinkligen System sei eine Gerade durch $\delta = 7$, $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$, $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ gegeben. Wie heifst ihre Gleichung? Liegt der Punkt $(-1, 8)$ auf der Geraden?

Aufg. 2. In welchen Punkten trifft die vorhergehende Gerade die Achsen und die Winkelhalbierenden derselben?

§ 18. Fortsetzung. Die Gerade sei gegeben durch die Achsenabschnitte.

Bezeichnet man die Abschnitte OA und OB, welche eine Gerade mit den beliebig gewählten Koordinatenachsen bildet, mit a und b und haben α, β, δ die frühere Bedeutung, so lehrt die Figur unmittelbar, dafs:

Fig. 16.



$$\cos\alpha = \frac{\delta}{a}, \quad \cos\beta = \frac{\delta}{b}$$

ist. Führt man diese Werte in die Gleichung der Geraden:

$$(1) \qquad x \cos\alpha + y \cos\beta - \delta = 0$$

ein und dividiert mit δ, so kommt:

$$(2) \qquad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0.$$

Da die linke Seite von (2) sich von der linken Seite von (1) nur durch den von Null verschiedenen Faktor δ unterscheidet, so genügt jedes Wertepaar, welches der Gleichung (1) genügt, auch der Gleichung (2) und umgekehrt. Die Gleichung (2) ist daher als die Gleichung der durch ihre Achsenabschnitte a und b bestimmten Geraden aufzufassen.

Aufg. 1. Welche Form nimmt die Gleichung der Geraden an, wenn einer der Achsenabschnitte a oder b unendlich grofs wird, d. h. wenn die Gerade einer der Achsen parallel ist?

Aufg. 2. Wie heifsen die Gleichungen der vier Geraden mit den Achsenabschnitten $a, a; -a, a; -a, -a; a, -a$?

Aufg. 3. Wähle auf der Geraden AB einen beliebigen Punkt P mit der Abscisse $OM = x$. Leite die Gleichung:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

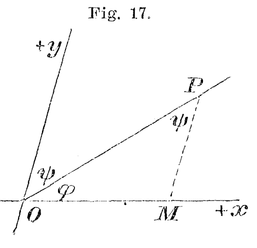
direkt aus der Proportion $OA : OB = MA : MP$ ab.

Aufg. 4. Wie heifst die Gleichung der Geraden mit den Achsenabschnitten -7 und 3?

§ 19. Fortsetzung. Die Gerade sei gegeben durch einen Punkt und den Winkel, den sie mit der positiven Richtung der x-Achse bildet.

Wir betrachten zunächst den Specialfall, dafs der gegebene Punkt der Anfangspunkt sei. Die Gerade bilde mit der positiven Richtung der x-Achse den Winkel φ (§ 8) und demnach mit der positiven Richtung der y-Achse den Winkel $w - \varphi = \psi$. Aus der Figur folgt dann für jeden Punkt P der Geraden aber auch nur für einen solchen die Gleichung:

Fig. 17.



$$\frac{MP}{OM} = \frac{y}{x} = \frac{\sin\varphi}{\sin\psi} = \frac{\sin\varphi}{\sin(w-\varphi)}.$$

Setzen wir $\frac{\sin\varphi}{\sin(w-\varphi)} = \mu$, so ist:

(1) $$y = \mu x$$

die Gleichung der durch O und den Winkel φ bestimmten Geraden.

Um nun die Gleichung der durch einen beliebigen Punkt P_1 gehenden Geraden, welche mit der positiven Richtung der x-Achse den Winkel φ einschliefst, zu finden, legen wir durch P_1 mit den Koordinaten x_1, y_1 ein neues Koordinatensystem parallel und gleichgerichtet mit dem alten.

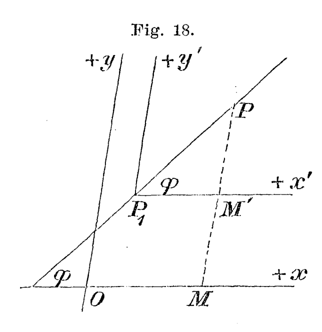


Fig. 18.

Ein beliebiger Punkt P der gegebenen Geraden, dessen alte Koordinaten x, y sind, hat dann die neuen Koordinaten $x' = x - x_1$, $y' = y - y_1$ und für diese besteht, da w und φ in dem neuen System dieselben sind wie in dem alten, die Gleichung $y' = \mu x'$. Daraus folgt aber, indem man zu dem alten System zurückkehrt:

(2) $$y - y_1 = \mu(x - x_1).$$

Dieses ist daher die gesuchte Gleichung der durch P_1 und φ resp. μ definierten Geraden.

Liegt insbesondere P_1 auf der Ordinatenachse, so ist $x_1 = 0$ und y_1 gleich dem Abschnitte, den die Gerade mit der Ordinatenachse bestimmt. Bezeichnet man denselben wie früher mit b, so ist:

(3) $$y = \mu x + b$$

die Gleichung der durch ihren Abschnitt auf der Ordinatenachse und ihre Richtung bestimmten Geraden.

Man bezeichnet den in den drei Gleichungen (1), (2) und (3) als Faktor von x auftretenden Koefficienten nämlich:

$$\mu = \frac{\sin \varphi}{\sin (w - \varphi)},$$

als den Richtungskoefficienten der betreffenden Geraden. In demselben Koordinatensystem haben dann parallele Geraden gleiche Richtungskoefficienten. Um denselben für eine durch zwei Punkte P_1 und P_2 bestimmte Gerade zu finden, kann man von der Bemerkung ausgehen, dafs die durch P_1 und den Richtungskoefficienten μ charakterisierte Gerade die Gleichung:

$$y - y_1 = \mu(x - x_1)$$

besitzt. Soll die Gerade aber auch noch durch P_2 hindurchgehen, so müssen die Koordinaten von P_2 dieser Gleichung genügen, d. h. es mufs sein:

$$y_2 - y_1 = \mu(x_2 - x_1)$$

oder:

$$\mu = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \tag{4}$$

Die Gleichung der durch P_1 und P_2 gehenden Geraden kann daher auch in der Form:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \tag{5}$$

und ebenso auch in der Form:

$$y - y_2 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_2) \tag{6}$$

geschrieben werden. (Vergl. § 16, Gl. (2).)

Ist das Koordinatensystem ein rechtwinkliges, so folgt aus $\sin(w - \varphi) = \sin(90^0 - \varphi) = \cos\varphi$, dafs:

$$\mu = \operatorname{tg}\varphi \tag{7}$$

ist.

Aufg. 1. Bestimme in einem beliebigen Koordinatensystem die Gleichungen der durch $(2, -5)$ gehenden Geraden, welche a) den Achsen, b) den Winkelhalbierenden parallel sind.

Aufg. 2. Leite Gleichung (4) direkt aus der entsprechenden Figur ab.

Aufg. 3. Beweise, dafs nicht nur jede Gerade einen ganz bestimmten Richtungskoefficienten besitzt, sondern dafs auch umgekehrt jede Zahl als Richtungskoefficient einer ganz bestimmten durch P_1 gehenden Geraden aufgefafst werden kann. Durch Auflösen der Gleichung:

$$\mu = \frac{\sin\varphi}{\sin(w - \varphi)}$$

erhält man nämlich zu jedem μ einen einzigen Wert von $\operatorname{tg}\varphi$. Geraden mit demselben Richtungskoefficienten müssen daher parallel sein oder zusammenfallen.

Aufg. 4. Ein Dreieck ist durch $(-2, -5)$; $(3, -4)$; $(-1, 2)$ gegeben. Bestimme die Richtungskoefficienten der drei Seiten, sowie die Gleichungen der drei Geraden, welche

durch die Ecken des Dreiecks gehen und den gegenüberliegenden Seiten desselben parallel sind.

Aufg. 5. Bestimme die Gleichungen der drei Geraden, welche durch den Anfangspunkt gehen und den Mittellinien des vorhergehenden Dreiecks parallel sind.

§ 20. Jede Gerade besitzt eine Gleichung von der Form $Ax + By + C = 0$ und umgekehrt jede Gleichung dieser Form stellt eine Gerade dar.

Je nach der Bestimmungsart konnten wir für ein und dieselbe Gerade unter Voraussetzung eines beliebigen Koordinatensystems die folgenden Gleichungen ableiten:

$$x(y_1 - y_2) - y(x_1 - x_2) + x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0,$$

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1),$$

$$x \cos\alpha + y \cos\beta \cancel{+ \cos\beta} - \delta = 0,$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

$$y - y_1 = \mu(x - x_1),$$

$$y = \mu x + b.$$

So verschieden nun auch diese Gleichungen (deren Anzahl man noch beliebig vergröſsern könnte, da sich dieselbe Gerade auf unzählig viele Arten bestimmen läſst) auf den ersten Blick erscheinen mögen, sie haben doch alle das Gemeinschaftliche, daſs jede von ihnen die Gröſsen x und y in der ersten Potenz und behaftet mit bekannten Koefficienten enthält und auſserdem noch ein von x und y freies Glied.

Jede der Gleichungen ist also von der Form:

$$Ax + By + C = 0,$$

wo A, B und C durch die Bestimmungsart der Geraden gegebene, also bekannte Gröſsen bedeuten, während x und y keine festen Werte haben, sondern in dem Sinne veränderlich sind, daſs sie die Koordinaten eines jeden Punktes der Geraden bedeuten können. Man nennt aus diesem Grunde x und y auch die laufenden Koordinaten.

Die verschiedenen Gleichungen, die wir für eine und die-

selbe Gerade erhalten, unterscheiden sich also nur durch die Werte der Koefficienten A, B, C von einander, die man im Gegensatz zu den Veränderlichen x und y auch die Konstanten der betreffenden Gleichung nennt. Es drängen sich nun sofort zwei fundamentale Fragen auf:

I. Wenn jetzt durch die verschiedensten Beispiele gezeigt ist, dafs jede gerade Linie eine Gleichung von der Form $Ax + By + C = 0$ besitzt, kann dann auch umgekehrt jede Gleichung von dieser Form als die Gleichung einer Geraden aufgefafst werden?

II. Wenn man für eine und dieselbe Gerade das eine Mal die Gleichung $Ax + By + C = 0$, das andere Mal $A'x + B'y + C' = 0$ findet, welche Beziehung besteht dann zwischen A, B, C einerseits und A', B', C' andererseits?

Um die erste Frage zu beantworten, nehmen wir an, es sei eine beliebige Gleichung von der Form $Ax + By + C = 0$ gegeben, wo A, B, C ganz beliebige, positive oder negative, gegebene also bekannte Gröfsen bedeuten, die auch zum Teil gleich Null sein können. Da die Gleichung zwei Unbekannte x und y besitzt, so giebt es unzählig viele Wertepaare x, y, welche ihr genügen; denn man kann der einen der beiden Unbekannten einen ganz beliebigen Wert beilegen und erhält dann jedesmal durch Auflösen nach der andern Unbekannten für diese einen ganz bestimmten zugehörigen Wert. Wir wollen nun, indem wir ein beliebiges Koordinatensystem zu Grunde legen, jedes Wertepaar, welches der Gleichung:

$$(1) \qquad Ax + By + C = 0$$

genügt, durch einen Punkt repräsentieren und haben dann zu beweisen, dafs alle diese Punkte eine gerade Linie erfüllen. Zu diesem Zwecke nehmen wir zunächst an, in der Gleichung (1) sei $B = 0$. Zu jedem y findet man dann aus $Ax + C = 0$ immer denselben zugehörigen Wert $x = -\frac{C}{A}$. Die entsprechenden Punkte liegen daher alle auf der Parallelen zur y-Achse, welche auf der x-Achse das Stück $-\frac{C}{A}$ abschneidet,

und umgekehrt genügen die Koordinaten jedes Punktes dieser Parallelen der Gleichung $Ax + C = 0$.

Ist dagegen B von Null verschieden, so erhalten wir durch Auflösen der Gleichung (1) nach y:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}. \tag{2}$$

Jedes Wertepaar x, y, welches der Gleichung (1) genügt, befriedigt auch die Gleichung (2) und umgekehrt.

Konstruiert man aber jetzt eine Gerade, deren Richtungskoeffizient $\mu = -\frac{A}{B}$ ist (§ 19, Aufg. 3), und welche auf der y-Achse das Stück $-\frac{C}{B}$ abschneidet, so lautet die Gleichung derselben:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}.$$

Da diese mit (2) völlig identische Gleichung allemal aber auch nur dann erfüllt wird, wenn x, y die Koordinaten eines Punktes jener Geraden bedeuten und da dasselbe folglich auch von Gleichung (1) gilt, so ist damit bewiesen, dafs für jedes beliebige Koordinatensystem jede Gleichung von der Form $Ax + By + C = 0$ als die Gleichung einer Geraden aufgefafst werden kann. (Zur Abkürzung werden wir im Folgenden häufig eine Gerade durch ihre Gleichung benennen und von der Geraden $Ax + By + C = 0$ reden.)

Zur Beantwortung der zweiten Frage nehmen wir an, die beiden Gleichungen $Ax + By + C = 0$ und $A'x + By' + C' = 0$ stellten dieselbe gerade Linie dar. Wir unterscheiden zwei Fälle: 1) $B = 0$. Dann stellt die erste Gleichung eine Parallele zur Ordinatenachse dar, und es mufs daher auch, da die zweite Gleichung dieselbe Parallele darstellen soll, $B' = 0$ sein, weil man sonst nicht für jedes y dasselbe x erhalten würde. Dann folgt aber $-\frac{C}{A} = -\frac{C'}{A'}$ oder $\frac{A}{A'} = \frac{C}{C'}$.

Bezeichnet man den gemeinschaftlichen Wert dieser beiden Brüche mit λ, so folgt:

$$A = A'\lambda, \quad B = B'\lambda.$$

2) B und folglich auch B' seien von Null verschieden. Zu jedem x mufs dann aus beiden Gleichungen dasselbe y sich ergeben, d. h. es mufs für jedes x sein:

$$-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}=-\frac{A'}{B'}x-\frac{C'}{B'}.$$

Für $x=0$ folgt hieraus $\frac{C}{B}=\frac{C'}{B'}$, daher mufs auch für jedes x die Gleichung $\frac{A}{B}x=\frac{A'}{B'}x$ bestehen, d. h. es mufs $\frac{A}{B}=\frac{A'}{B'}$ sein. Hieraus und aus $\frac{C}{B}=\frac{C'}{B'}$ folgt aber $\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}$. Bezeichnet man den gemeinschaftlichen Wert dieser Brüche wieder mit λ, so ergiebt sich:

$$A=A'\lambda,\quad B=B'\lambda,\quad C=C'\lambda.$$

In allen Fällen finden wir also:

Wenn die beiden Gleichungen $Ax+By+C=0$ und $A'x+B'y+C'=0$ dieselbe Gerade darstellen sollen, so mufs die eine aus der andern durch Multiplikation mit einem konstanten Faktor hervorgehen.

Umgekehrt ist klar, dafs wenn man die Gleichung einer Geraden mit einem beliebigen konstanten Faktor multipliziert, die neue Gleichung dieselbe Gerade darstellt wie die alte.

Aufg. 1. Liegen die Punkte $(2,-3)$; $(-1,-4)$; $(-2,7)$; $(12,2)$ auf der Geraden $x-5y=2$?

Aufg. 2. Welche von den Geraden $8x-5y+1=0$, $y=-7x+2$, $3x-5y-6=0$ geht durch den Punkt $(\frac{1}{2},-\frac{9}{10})$?

Aufg. 3. Welche von den Geraden $5x+3y+1=0$, $2x+3y=0$, $4x-5y+2=0$ geht durch den Anfangspunkt?

Aufg. 4. Wie heifst die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dafs der Punkt (x_1, y_1) auf der Geraden $Ax+By+C=0$ liegt?

Aufg. 5. Wenn (x_1, y_1) und (x_2, y_2) auf der Geraden $Ax+By+C=0$ liegen, so liegt auch der Punkt $\left(\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\right)$ für jedes beliebige λ auf der Geraden. Beweise dies zunächst durch wirkliches Ausrechnen und gieb dann den inneren Grund an.

§ 21. Ableitung der speziellen Formen der Gleichung einer Geraden aus der allgemeinen Form $Ax + By + C = 0$.

Aus der am Ende des vorigen Paragraphen gemachten Bemerkung folgt, dafs die allgemeine Gleichung:

$$Ax + By + C = 0$$

nur scheinbar drei willkürliche Konstanten enthält; denn da die Bedeutung jener Gleichung durch Multiplikation mit einer beliebigen Konstanten, etwa $\frac{1}{C}$, nicht geändert wird, so ist die durch $Ax + By + C = 0$ oder $\frac{A}{C}x + \frac{B}{C}y + 1 = 0$ dargestellte Gerade schon vollständig bestimmt, wenn man nur die Verhältnisse $\frac{A}{C}$ und $\frac{B}{C}$ kennt. Die Gleichung einer Geraden enthält also im Grunde genommen nur zwei willkürliche Konstanten, die allemal so gewählt werden können, dafs die Gerade zwei Bedingungen erfüllt. Die speziellen Formen der Gleichung einer Geraden, nämlich:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

$$y = \mu x + b,$$

$$x \cos \alpha + y \cos \beta - \delta = 0$$

etc. bringen dies auch deutlich zum Ausdruck.

Es mufs nun nach dem Vorhergehenden möglich sein, jede dieser speziellen Formen durch einfache Multiplikation mit einem konstanten Faktor aus der allgemeinen Form abzuleiten.

Bezeichnet man z. B. die Achsenabschnitte der Geraden $Ax + By + C = 0$ mit a und b, so wird dieselbe Gerade auch durch die Gleichung $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0$ dargestellt, und man erkennt, dafs die erste Gleichung mit der zweiten durch Multiplikation mit $-\frac{1}{C}$ in Übereinstimmung gebracht werden kann. Vergleicht man aber jetzt $-\frac{A}{C}x - \frac{B}{C}y - 1 = 0$ mit $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0$, so findet man:

$$a = -\frac{C}{A}, \quad b = -\frac{C}{B}$$

als die Achsenabschnitte der Geraden $Ax + By + C = 0$.

Natürlich ergiebt sich das gleiche Resultat, wenn man bedenkt, dafs die Schnittpunkte der Geraden $Ax + By + C = 0$ mit den Achsen durch die Koordinaten a, 0 resp. 0, b ausgezeichnet sind. Man setze daher das eine Mal $y = 0$ und löse nach x auf, wodurch sich $x = a = -\frac{C}{A}$ ergiebt, das andere Mal $x = 0$ und löse nach y auf, was zu $y = b = -\frac{C}{B}$ führt. Man beachte, dafs die Gerade $Ax + By + C = 0$ allemal aber auch nur dann durch den Anfangspunkt geht, wenn das absolute Glied $C = 0$ ist.

Will man ferner den Richtungskoeffizienten μ der Geraden $Ax + By + C = 0$ bestimmen, so hat man, wie dies bereits im vorhergehenden Paragraphen auseinandergesetzt wurde, nur durch B zu dividieren, d. h. nach y aufzulösen. Die Gleichung:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

zeigt dann, dafs:

$$\mu = -\frac{A}{B}$$

und (wie schon bekannt):

$$b = -\frac{C}{B}$$

ist. Der Richtungskoeffizient μ ist also allein von den Koeffizienten A und B von x und y abhängig, nicht aber von dem absoluten Gliede. Daraus folgt, dafs Gleichungen, die sich nur durch das absolute Glied von einander unterscheiden, wie etwa $2x - 5y + 4 = 0$ und $2x - 5y - 3 = 0$ parallele Geraden darstellen (§ 19, Aufg. 3).

Aufg. 1. Bestimme die Achsenabschnitte und die Richtungskoeffizienten der Geraden $2x + 7y + 5 = 0$, $3x + 4y = 6$, $-5x + 2y = 7$, $5x - 8y - 2 = 0$.

Aufg. 2. Bestimme die Achsenabschnitte der beiden Geraden $5x - 8y + 9 = 0$ und $56y - 35x = 63$ und diskutiere das Resultat.

Aufg. 3. Bestimme die Richtungskoeffizienten der Geraden $5x - 7y = 0$, $3x + 8 = 0$, $2y - 7 = 0$.

Aufg. 4. Bestimme μ und b so, daſs die Gerade $y = \mu x + b$ durch die beiden Punkte (x_1, y_1); (x_2, y_2) hindurchgeht und konstatiere die Übereinstimmung des Resultats mit § 19, Gl. (5).

Aufg. 5. Bestimme den Richtungskoeffizienten der Geraden $x \cos\alpha + y \cos\beta - \delta = 0$ und leite das Resultat auch geometrisch ab.

Aufg. 6. Welches sind die Achsenabschnitte der Geraden:

$$x(y_1 - y_2) - y(x_1 - x_2) + x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0\,?$$

Aufg. 7. Beweise, daſs zwischen Richtungskoeffizient und Achsenabschnitten die Gleichung $\mu = -\frac{b}{a}$ besteht. Erläutere dies an der Figur.

§ 22. Fortsetzung. Die Normalform.

Unter Voraussetzung eines rechtwinkligen Koordinatensystems soll die Gleichung $Ax + By + C = 0$ einer Geraden auf die Form $x \cos\alpha + y \sin\alpha - \delta = 0$ gebracht werden, d. h. man soll den Abstand δ des Anfangspunktes von der Geraden $Ax + By + C = 0$ und den Winkel α bestimmen, welchen dieser Abstand mit der positiven Richtung der x-Achse bildet.

Nach § 20 muſs es einen Faktor λ geben, sodaſs:

$$\lambda A = \cos\alpha, \quad \lambda B = \sin\alpha, \quad \lambda C = -\delta \quad \text{ist.}$$

Aus den beiden ersten Gleichungen folgt durch Quadrieren und Addieren $\lambda^2(A^2 + B^2) = 1$ oder $\lambda = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$. Nach der dritten Gleichung soll λC negativ sein, also hat man überdies der Quadratwurzel das entgegengesetzte Zeichen von C zu geben. Dann ist also jetzt:

$$\cos\alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad \sin\alpha = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad \delta = -\frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Unter allen Formen, in denen sich die Gleichung einer Geraden darstellen läſst, spielt die Form $x \cos\alpha + y \sin\alpha - \delta = 0$ wegen der geometrischen Bedeutung der linken Seite eine besondere Rolle. Wir erinnern uns, daſs diese linke Seite allemal den mit dem entgegengesetzten Zeichen genommenen Abstand des Punktes (x, y) von der Geraden (α, δ) darstellt;

diese Eigenschaft hatte uns wesentlich zur Einführung des Begriffes der Gleichung einer Geraden gedient. Man hat daher diese spezielle Gleichungsform $x \cos \alpha + y \sin \alpha - \delta = 0$ durch einen besonderen Namen ausgezeichnet und sie die Normalform genannt. Will man die Gleichung $Ax + By + C = 0$ einer Geraden auf die Normalform bringen, so hat man sie nach dem Obigen durch $\sqrt{A^2 + B^2}$ zu dividieren, wo der Quadratwurzel das entgegengesetzte Zeichen von C zu geben ist. In der Gleichung:

$$\frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 0,$$

welche nunmehr mit $x \cos \alpha + y \sin \alpha - \delta = 0$ völlig identisch ist, stellt dann die linke Seite ebenfalls den mit dem entgegengesetzten Zeichen genommenen Abstand d des Punktes (x, y) von der Geraden $Ax + By + C = 0$ dar, d. h. es ist:

$$Ax + By + C = - d\sqrt{A^2 + B^2}.$$

Dadurch gewinnen wir aber eine neue Einsicht in die Bedeutung der allgemeinen Gleichung $Ax + By + C = 0$ einer Geraden. Es stellt nämlich der Ausdruck auf der linken Seite, also $Ax + By + C$, den mit $-\sqrt{A^2 + B^2}$ multiplizierten Abstand des Punktes (x, y) von der durch die Achsenabschnitte $-\frac{C}{A}$ und $-\frac{C}{B}$ oder durch den Richtungskoeffizienten $-\frac{A}{B}$ bestimmten Geraden dar. Dieser Ausdruck $Ax + By + C$ ist daher positiv für alle Punkte auf der einen Seite der Geraden, negativ für alle Punkte auf der andern Seite und verschwindet allemal aber auch nur dann, wenn der Punkt (x, y) auf der Geraden selbst liegt. In dieser Weise tritt die eigentliche Bedeutung der Gleichung $Ax + By + C = 0$ einer Geraden scharf hervor. Zugleich ist durch das Vorhergehende die folgende Aufgabe erledigt:

Es soll der Abstand eines Punktes (x_0, y_0) von der Geraden $Ax + By + C = 0$ nach Gröſse und Vorzeichen angegeben werden.

Der gesuchte Abstand ist nämlich:

$$d = - \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

wo nach dem Obigen der Quadratwurzel das entgegengesetzte Zeichen von C zu geben ist.

Aufg. 1. Bringe folgende Gleichungen auf die Normalform:

$$3x - 4y + 7 = 0,\ \ 5x + 12y - 1 = 0,\ \ 8x + 3y + 1 = 0$$

und bestimme daraus die Lage der Geraden.

Aufg. 2. Bestimme für die Geraden $2x + 7y = 1$, $5y - 3x = 4$, $3 + 4x + 3y = 0$, $2x - 5y - 1 = 0$ jedesmal den Quadranten, in dem sich das entsprechende α befindet.

Aufg. 5. Wie weit ist die Gerade $12x - 5y + 4 = 0$ vom Anfangspunkte entfernt?

Aufg. 4. Bestimme die Abstände der Punkte $(-1, 5)$; $(2, -7)$; $(0, 1)$; $(1, 0)$; $(0, 0)$; $(0, \frac{5}{16})$ von der Geraden:

$$63x - 16y + 5 = 0$$

und diskutiere die Vorzeichen.

Aufg. 5. Welches ist die geometrische Bedeutung der Ausdrücke:

$$16x_0 + 63y_0 - 2,\ \ 3x_0 + 8y_0 - 5,\ \ x_0 - y_0,\ \ x_0 + y_0,$$

wenn x_0, y_0 die Koordinaten eines gegebenen Punktes sind.

Aufg. 6. Man bestimme den doppelten Flächeninhalt des Dreiecks $P_1 P_2 P_3$, welches durch die Koordinaten seiner Ecken gegeben ist, dadurch, daſs man die Seite $P_1 P_2$ mit dem von P_3 auf sie gefällten Lote multipliziert. Konstatiere die Übereinstimmung des Resultats mit § 11.

Aufg. 7. Drücke die Bedingung dafür aus, daſs der Punkt $(x_0 y_0)$ von den beiden Geraden $Ax + By + C = 0$ und $A'x + B'y + C' = 0$ gleiche Abstände hat. Wo liegen alle diese Punkte und wie kann man demnach das Resultat deuten?

§ 23. Die Koordinaten des Durchschnittspunktes zweier Geraden aus den Gleichungen derselben zu bestimmen.

Die beiden Geraden seien durch die Gleichungen:

$$A_1 x + B_1 y + C_1 = 0, \tag{1}$$

$$A_2 x + B_2 y + C_2 = 0 \tag{2}$$

gegeben.

Die Koordinaten x, y des Schnittpunktes S müssen dann den beiden Gleichungen gleichzeitig genügen; man findet sie daher, indem man (1) und (2) als Gleichungen mit den beiden Unbekannten x und y betrachtet und nach diesen auflöst.

Man erhält:

$$(3) \qquad x = \frac{B_1 C_2 - B_2 C_1}{A_1 B_2 - A_2 B_1}, \quad y = \frac{C_1 A_2 - C_2 A_1}{A_1 B_2 - A_2 B_1}.$$

Diese Formeln liefern für die Koordinaten des Schnittpunktes ganz bestimmte endliche Werte, vorausgesetzt, dafs:

$$A_1 B_2 - A_2 B_1$$

von Null verschieden ist. Hat man aber:

$$A_1 B_2 - A_2 B_1 = 0,$$

während die Zähler von x und y nicht verschwinden, so werden x und y unendlich grofs, der Schnittpunkt S liegt im Unendlichen, d. h. die beiden Geraden sind parallel. In der That folgt aus $A_1 B_2 - A_2 B_1 = 0$, dafs $-\frac{A_1}{B_1} = -\frac{A_2}{B_2}$, d. h. dafs die Richtungskoeffizienten gleich sind.

Aufg. 1. Die Seiten eines Dreiecks haben die Gleichungen:

$$x - 5y = 1, \quad 2x + 3y = 4, \quad 5x - 3y + 2 = 0.$$

Bestimme die Koordinaten der Ecken.

Aufg. 2. Diskutiere die Formeln für die Koordinaten des Schnittpunktes, falls von den Ausdrücken:

$$A_1 B_2 - A_2 B_1, \quad B_1 C_2 - B_2 C_1, \quad C_1 A_2 - C_2 A_1$$

einer, zwei oder alle drei verschwinden. Zeige, dafs wenn zwei der Ausdrücke verschwinden, der dritte im allgemeinen auch verschwindet, und dafs dann die beiden Geraden zusammenfallen.

Aufg. 3. Diskutiere dieselben Formeln für den Fall, dafs von den Koeffizienten $A_1, B_1, C_1; A_2, B_2, C_2$ einer oder mehrere, z. B. A_1 und A_2 oder A_1 und B_2 verschwinden.

Aufg. 4. Geht die Gerade $x - 3y - 7 = 0$ durch den Schnittpunkt von $2y - 3x = 8$ und $4x - 7y = 1$?

Aufg. 5. Bestimme den Schnittpunkt von:

$$6x - 7y + 5 = 0, \quad 56y = 40 + 48x$$

und diskutiere das Resultat.

Aufg. 6. Beweise, daſs der doppelte Inhalt des durch die Geraden:

$$A_1x+B_1y+C_1=0,\ A_2x+B_2y+C_2=0,\ A_3x+B_3y+C_3=0$$

gebildeten Dreiecks durch die Formel:

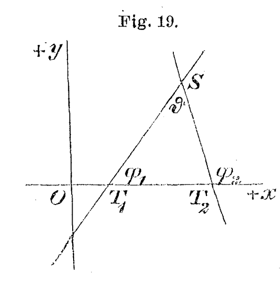
$$\frac{[A_1(B_2C_3-B_3C_2)+A_2(B_3C_1-B_1C_3)+A_3(B_1C_2-B_2C_1)]}{(A_2B_3-A_3B_2)(A_3B_1-A_1B_3)(A_1B_2-A_2B_1)}$$

gegeben wird.

Aufg. 7. Bestimme aus den Koordinaten der Ecken des Dreiecks $P_1P_2P_3$ die Koordinaten des Schnittpunktes zweier Mittellinien (§ 9, Aufg. 3 und 4).

§ 24. Den Winkel zweier Geraden aus ihren Gleichungen zu bestimmen unter Voraussetzung rechtwinkliger Koordinaten.

Fig. 19.



Bezeichnet man die ganz bestimmten Winkel, welche die Geraden $A_1x+B_1y+C_1=0$ und $A_2x+B_2y+C_2=0$ mit der positiven Richtung der x-Achse bilden, mit φ_1 und φ_2, so ist einer der beiden Winkel, welche die Geraden miteinander bilden, allemal $\varphi_2-\varphi_1$ oder $\varphi_1-\varphi_2$, je nachdem φ_2 gröſser oder kleiner als φ_1 ist, seine Tangente ist daher entweder $\operatorname{tg}(\varphi_2-\varphi_1)$ oder $\operatorname{tg}(\varphi_1-\varphi_2)=-\operatorname{tg}(\varphi_2-\varphi_1)$.

Da aber die Tangente des Nebenwinkels (wegen $\operatorname{tg}(180^0-\vartheta)=-\operatorname{tg}\vartheta$) alsdann gleich $\operatorname{tg}(\varphi_1-\varphi_2)$ oder gleich $\operatorname{tg}(\varphi_2-\varphi_1)$ ist, so folgt, daſs unter allen Umständen $\operatorname{tg}(\varphi_2-\varphi_1)$ gleich der Tangente einer der beiden Winkel ist, welche die Geraden mit einander bilden. Nun ist:

$$\operatorname{tg}(\varphi_2-\varphi_1)=\frac{\operatorname{tg}\varphi_2-\operatorname{tg}\varphi_1}{1+\operatorname{tg}\varphi_2\operatorname{tg}\varphi_1}.$$

Da aber das Koordinatensystem ein rechtwinkliges ist, so sind $\operatorname{tg}\varphi_1$ und $\operatorname{tg}\varphi_2$ die Richtungskoeffizienten der beiden Geraden (§ 19, Gl. (7)), also gleich $-\frac{A_1}{B_1}$ resp. $-\frac{A_2}{B_2}$. Setzt man diese

Werte in $\operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi_1)$ ein, so erhält man nach einfacher Reduktion:

$$\operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{A_1 A_2 + B_1 B_2}.$$

Von besonderem Interesse sind die beiden Fälle, für welche $\operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi_1)$ verschwindet resp. unendlich grofs wird. Dann sind die beiden Geraden einander parallel resp. zu einander normal; und umgekehrt, wenn dies stattfindet, mufs $\operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi_1)$ verschwinden resp. unendlich grofs werden. Daraus folgt:

I. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dafs die Geraden $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$ und $A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$ einander parallel sind, lautet:

$$A_1 B_2 - A_2 B_1 = 0.$$

II. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dafs die Geraden $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$ und $A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$ auf einander senkrecht stehen, heifst:

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0.$$

Sind die beiden Geraden durch die Gleichungen $y = \mu_1 x + b_1$ und $y = \mu_2 x + b_2$ gegeben, so findet man:

$$\operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{\mu_2 - \mu_1}{1 + \mu_1 \mu_2}$$

und die Bedingungen I und II lauten dann einfacher:

$$\mu_1 = \mu_2 \quad \text{resp.} \quad 1 + \mu_1 \mu_2 = 0 \quad \text{oder} \quad \mu_2 = -\frac{1}{\mu_1}.$$

Zu beachten ist, dafs die Gleichung $A_1 B_2 - A_2 B_1 = 0$ resp. $\mu_1 = \mu_2$ auch für schiefwinklige Koordinaten die Bedingung des Parallelismus ausdrückt (§ 23), während die Bedingung $A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0$ resp. $1 + \mu_1 \mu_2 = 0$ den rechtwinkligen Koordinaten ausschliefslich zukommt.

Mit Berücksichtigung von § 19 können wir nun sofort folgende Aufgaben lösen:

1) Die Gleichung der Geraden zu bestimmen, welche durch den Punkt (x_1, y_1) geht und der Geraden $y = \mu x + b$ parallel ist.

Da die Parallele ebenfalls den Richtungskoeffizienten μ besitzt, so lautet ihre Gleichung:

$$y - y_1 = \mu(x - x_1).$$

Diese Lösung gilt für schiefwinklige wie für rechtwinklige Koordinaten.

2) Für ein rechtwinkliges Koordinatensystem die Gleichung der Geraden zu bestimmen, welche durch den Punkt (x_1, y_1) geht und auf der Geraden $y = \mu x + b$ senkrecht steht.

Da der Richtungskoeffizient der gesuchten Normalen gleich $-\frac{1}{\mu}$ sein mufs, so lautet die Gleichung derselben:

$$y - y_1 = -\frac{1}{\mu}(x - x_1).$$

Ist die gegebene Gerade durch die Gleichung $Ax + By + C = 0$ dargestellt $\left(\text{also } \mu = -\frac{A}{B}\right)$, so ergeben sich für die Parallele und die Normale die Gleichungen:

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0,$$
$$B(x - x_1) - A(y - y_1) = 0,$$

von denen die erstere für beliebige, die letztere ausschliefslich für rechtwinklige Koordinaten gilt. Die Gleichung der Normalen kann man auch in der Form $\frac{x - x_1}{A} = \frac{y - y_1}{B}$ schreiben.

Es ist von praktischem Werte sich zu merken, dafs die Gleichung irgend einer Parallelen oder irgend einer Normalen der Geraden $Ax + By + C = 0$ sich allemal in der Form:

$$Ax + By + C' = 0 \quad \text{resp.}$$
$$Bx - Ay + C'' = 0$$

darstellen läfst. C' und C'' sind dann noch unbekannte Konstanten, die dadurch bestimmt werden können, dafs man die Parallele resp. die Normale noch einer weiteren Bedingung unterwirft, z. B. durch einen festen Punkt zu gehen. Oft aber ist die Bestimmung von C' und C'' gar nicht gefordert, und dann hat man in den angegebenen Gleichungen sofort die fertigen Lösungen.

Bei den folgenden Aufgaben sollen rechtwinklige Koordinaten vorausgesetzt werden.

Aufg. 1. Man zeige direkt, dafs für zwei auf einander senkrecht stehende Geraden $\mu_1 = -\frac{1}{\mu_2}$ ist.

Aufg. 2. Bestimme die Winkel des Dreiecks $(2, 5)$; $(-1, 4)$; $(3, 2)$.

Aufg. 3. Bestimme die Gleichung der Geraden, welche durch den Anfangspunkt geht und zu $2x - 7y + 11 = 0$ parallel ist.

Aufg. 4. Die Gleichungen der Seiten eines Dreiecks seien

$$2x + 7y - 3 = 0\,, \quad y - 5x + 1 = 0\,, \quad 3x - 4y + 2 = 0.$$

Wie heifsen die Gleichungen der drei Geraden, welche durch die Ecken des Dreiecks gehen und den Gegenseiten parallel sind?

Aufg. 5. Bestimme die Gleichungen der drei Höhen des Dreiecks $(1, 2)$; $(3, -4)$; $(-2, -5)$ und die Koordinaten des Schnittpunktes von je zwei Höhen.

Aufg. 6. Bestimme für dasselbe Dreieck die Gleichungen der Senkrechten in den Mitten der Seiten und die Koordinaten des Schnittpunktes von je zweien derselben.

Aufg. 7. Beweise, dafs die Gleichungen der drei Höhen des Dreiecks (x_1, y_1); (x_2, y_2); (x_3, y_3) lauten:

$$(x - x_1)(x_2 - x_3) + (y - y_1)(y_2 - y_3) = 0\,,$$
$$(x - x_2)(x_3 - x_1) + (y - y_2)(y_3 - y_1) = 0\,,$$
$$(x - x_3)(x_1 - x_2) + (y - y_3)(y_1 - y_2) = 0.$$

Beachte die cyklische Vertauschung sowie den Umstand, dafs durch Addition der drei Gleichungen die linke Seite identisch verschwindet.

Aufg. 8. Beweise, dafs die Gleichungen der drei Senkrechten, die man in den Mitten der Seiten eines Dreiecks auf denselben errichten kann, lauten:

$$x(x_2 - x_3) + y(y_2 - y_3) - \tfrac{1}{2}(x_2^2 - x_3^2) - \tfrac{1}{2}(y_2^2 - y_3^2) = 0.$$

(Die beiden andern erhält man durch cyklische Vertauschung.) Durch Addition der drei Gleichungen erhält man wieder identisch Null.

Aufg. 9. Bestimme die Gleichung der Senkrechten, welche man von (x_1, y_1) auf die Gerade $x \cos\alpha + y \sin\alpha - \delta = 0$ fällen kann, den Fufspunkt dieser Senkrechten und dessen Entfernung von (x_1, y_1).

Aufg. 10. Die Gleichungen der beiden Geraden zu ermitteln, welche durch (3, — 5) gehen und die Gerade:

$$7x + 2y - 4 = 0$$

unter 45^0 schneiden.

§ 25. Die Bedingung zu finden, unter welcher sich die drei Geraden $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ und $A_3x + B_3y + C_3 = 0$ in einem Punkte schneiden.

Damit die drei Geraden durch einen und denselben Punkt gehen, ist notwendig und hinreichend, daſs die Koordinaten des Schnittpunktes der beiden ersten Geraden (§ 23) der Gleichung der dritten Geraden genügen. Man findet daher die gewünschte Bedingung in der Form:

$$A_3(B_1C_2 - B_2C_1) + B_3(C_1A_2 - C_2A_1) + C_3(A_1B_2 - A_2B_1) = 0$$

oder anders geordnet:

$$A_1(B_2C_3 - B_3C_2) + B_1(C_2A_3 - C_3A_2) + C_1(A_2B_3 - A_3B_2) = 0.$$

Es läſst sich aber noch ein anderes Kriterium angeben, welches in vielen Fällen leichter zu handhaben ist.

Angenommen nämlich, es sei möglich, drei von Null verschiedene Multiplikatoren λ_1, λ_2, λ_3 so zu bestimmen, daſs in dem Ausdruck:

$$(1) \qquad \begin{aligned} &\lambda_1(A_1x + B_1y + C_1) + \lambda_2(A_2x + B_2y + C_2) \\ &\quad + \lambda_3(A_3x + B_3y + C_3), \end{aligned}$$

den wir auch in der Form:

$$\begin{aligned} &(\lambda_1A_1 + \lambda_2A_2 + \lambda_3A_3)\,x + (\lambda_1B_1 + \lambda_2B_2 + \lambda_3B_3)y \\ &\quad + (\lambda_1C_1 + \lambda_2C_2 + \lambda_3C_3) \end{aligned}$$

schreiben können, die Koeffizienten von x und y und das absolute Glied gleich Null werden. Dann verschwindet der Ausdruck (1) offenbar identisch, d. h. für jedes Wertepaar x, y. Daſs dieser Fall eintreten kann, haben wir schon an den verschiedensten Beispielen gesehen (§ 16, Aufg. 6; § 24, Aufg. 7 und 8, dort war jedesmal $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$; bei Aufg. 1 des gegenwärtigen Paragraphen hat man $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -1$ zu wählen).

Wir behaupten nun:

Wenn es möglich ist, drei von Null verschiedene Multiplikatoren λ_1, λ_2, λ_3 so zu bestimmen, dafs der Ausdruck:

$$\lambda_1(A_1x+B_1y+C_1)+\lambda_2(A_2x+B_2y+C_2)+\lambda_3(A_3x+B_3y+C_3)$$

identisch verschwindet, so gehen die drei Geraden durch einen Punkt.

In der That, wenn der angegebene Ausdruck für alle x und y verschwindet, so verschwindet er auch für die Koordinaten x_0, y_0 des Schnittpunktes der beiden ersten Geraden. Für diese Koordinaten verschwinden aber die Faktoren von λ_1 und λ_2 für sich, also mufs $\lambda_3(A_3x_0 + B_3y_0 + C_3) = 0$ sein und da λ_3 nicht Null ist, so folgt $A_3x_0 + B_3y_0 + C_3 = 0$, d. h. der Schnittpunkt der beiden ersten Geraden liegt auf der dritten.

Mit Benutzung dieses Kriteriums folgt jetzt aus den oben erwähnten Beispielen, dafs in jedem Dreieck die Mittellinien (§ 16, Aufg. 6), die Höhen (§ 24, Aufg. 7) und die Senkrechten in den Mitten der Seiten (§ 24, Aufg. 8) sich in einem Punkte schneiden.

Aufg. 1. Untersuche durch Anwendung beider Kriterien, ob sich die Geraden $3x - 5y - 7 = 0$, $7x + 2y - 4 = 0$, $10x - 3y - 11 = 0$ in einem Punkte schneiden.

Aufg. 2. Löse dieselbe Aufgabe für die Geraden:

$$x - 2y = 0, \quad 3x + 5y = 0, \quad 2x - 7y + 3 = 0.$$

Aufg. 3. Diskutiere die Formel § 23, Aufg. 6 für den Fall, dafs Zähler oder Nenner verschwinden.

Aufg. 4. In welcher Beziehung stehen die drei Geraden des Textes zu einander, wenn:

$$\lambda_1(A_1x+B_1y+C_1)+\lambda_2(A_2x+B_2y+C_2)+\lambda_3(A_3x+B_3y+C_3)$$

identisch verschwindet und einer oder mehrere der Multiplikatoren gleich Null sind?

Aufg. 5. Bestimme aus den Koordinaten der Ecken eines Dreiecks die Koordinaten des Höhenschnittpunktes und des Mittelpunktes des umschriebenen Kreises.

Aufg. 6. Man beweise, dafs die Mittellinien eines Dreiecks mit den Seiten $CB = a$, $CA = b$, $AB = c$ sich in einem

Punkte schneiden, indem man CB als x-Achse und CA als y-Achse eines schiefwinkligen Achsensystems wähle.

§ 26. Die Gleichung einer Geraden zu finden, welche durch den Schnittpunkt der beiden Geraden $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ und $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ hindurchgeht.

Das im vorhergehenden Paragraphen entwickelte Kriterium führt unmittelbar zur Lösung der Aufgabe. Man erkennt leicht, daſs jede Gerade, welche durch den Schnittpunkt der beiden gegebenen hindurchgeht, sich durch die Gleichung:

$$(1) \qquad A_1x + B_1y + C_1 - k(A_2x + B_2y + C_2) = 0$$

darstellen läſst, wo k eine beliebige Konstante bedeutet.

Denn zunächst stellt diese Gleichung, weil in x und y vom ersten Grade, überhaupt eine gerade Linie dar, sodann wird die Gleichung durch die Koordinaten des Schnittpunktes der beiden gegebenen Geraden befriedigt, weil für diese Koordinaten $A_1x + B_1y + C_1$ und $A_2x + B_2y + C_2$ einzeln verschwinden, und endlich kann man durch passende Wahl von k bewirken, daſs die durch (1) dargestellte Gerade noch durch einen beliebigen Punkt (x_0, y_0) hindurchgehe. Man hat dann nur $k = \frac{A_1x_0 + B_1y_0 + C_1}{A_2x_0 + B_2y_0 + C_2}$ zu setzen. Oder man kann auch k so wählen, daſs die Gerade (1) einen vorgeschriebenen Richtungskoeffizienten besitzt.

Die Verhältnisse gestalten sich noch etwas übersichtlicher durch Einführung einer abgekürzten Bezeichnung. Wählt man nämlich für $A_1x + B_1y + C_1$ (nur der Kürze halber) die Bezeichnung G_1, ebenso für $A_2x + B_2y + C_2$ die Bezeichnung G_2, so kann man sagen:

Jede durch den Schnittpunkt von $G_1 = 0$ und $G_2 = 0$ gehende Gerade besitzt eine Gleichung von der Form $G_1 - kG_2 = 0$ und umgekehrt jede Gleichung dieser Form stellt eine durch den Schnittpunkt von $G_1 = 0$ und $G_2 = 0$ gehende Gerade dar.

Aufg. 1. Zeige, daſs wenn man k alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ beilegt, man sämtliche durch den Schnittpunkt der

beiden gegebenen Geraden gehenden Strahlen erhält (ein sogenanntes Strahlenbüschel).

Aufg. 2. Bestimme die Gleichung der Geraden, die den Schnittpunkt von $2x - 7y + 11 = 0$ und $5x + 3y - 1 = 0$ mit dem Punkte $(-2, 3)$ verbindet.

Aufg. 3. Bestimme die Gleichung der Geraden, die den Schnittpunkt von $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ und $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ mit dem Anfangspunkt verbindet.

Aufg. 4. Bestimme die Gleichung der Geraden, welche durch den Schnittpunkt von $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ und $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ hindurchgeht und zu der Geraden $A_3x + B_3y + C_3 = 0$ parallel ist.

Aufg. 5. Bestimme die Gleichung der Geraden, welche den Schnittpunkt von:

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \quad \text{und} \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

mit demjenigen von:

$$A_1'x + B_1'y + C_1' = 0 \quad \text{und} \quad A_2'x + B_2'y + C_2' = 0$$

verbindet.

§ 27. Die Gleichungen der Winkelhalbierenden zweier Geraden zu finden.

Unter Voraussetzung rechtwinkliger Koordinaten mögen die Gleichungen der beiden Geraden in der Normalform gegeben sein und heifsen:

$$x \cos \alpha_1 + y \sin \alpha_1 - \delta_1 = 0,$$
$$x \cos \alpha_2 + y \sin \alpha_2 - \delta_2 = 0.$$

Wir wollen die linken Seiten der beiden Gleichungen zur Abkürzung mit g_1 resp. g_2 bezeichnen. Es ist dann g_1 der mit dem entgegengesetzten Zeichen genommene Abstand des Punktes (x, y) von der ersten Geraden und ebenso g_2 der mit dem entgegengesetzten Zeichen genommene Abstand des Punktes (x, y) von der zweiten Geraden. Die Halbierungslinie desjenigen Winkels der beiden Geraden $g_1 = 0$ und $g_2 = 0$, in welchem sich der Anfangspunkt befindet, ist dann dadurch ausgezeichnet, dafs jeder Punkt (x, y) derselben von den beiden Geraden auch hinsichtlich des Vorzeichens gleiche Abstände

besitzt. Für jeden Punkt (x, y) dieser Halbierungslinie und nur für einen solchen ist daher:

$$g_1 = g_2$$

oder ausführlicher:

$$x \cos \alpha_1 + y \sin \alpha_1 - \delta_1 = x \cos \alpha_2 + y \sin \alpha_2 - \delta_2$$

und dies ist daher die Gleichung der betreffenden Halbierungslinie. Die Punkte der andern, darauf senkrecht stehenden Halbierungslinie aber haben allemal entgegengesetzt gleiche Abstände von den beiden gegebenen Geraden, für sie ist jedesmal:

$$g_1 = - g_2$$

und folglich lautet die Gleichung dieser zweiten Winkelhalbierenden:

$$x \cos \alpha_1 + y \sin \alpha_1 - \delta_1 = - (x \cos \alpha_2 + y \sin \alpha_2 - \delta_2).$$

Behalten wir die abgekürzte Bezeichnung bei, so können wir also die Gleichungen der Winkelhalbierenden der beiden Geraden $g_1 = 0$ und $g_2 = 0$ in der Form schreiben:

$$g_1 - g_2 = 0 \quad \text{und} \quad g_1 + g_2 = 0.$$

Aufg. 1. Die Seiten eines Dreiecks seien durch die Gleichungen:

$$x \cos \alpha_1 + y \sin \alpha_1 - \delta_1 = 0, \quad x \cos \alpha_2 + y \sin \alpha_2 - \delta_2 = 0,$$
$$x \cos \alpha_3 + y \sin \alpha_3 - \delta_3 = 0$$

oder abgekürzt durch $g_1 = 0$, $g_2 = 0$, $g_3 = 0$ gegeben. Nimmt man den Anfangspunkt im Innern des Dreiecks an, so heiſsen die Gleichungen der Halbierungslinien der Dreieckswinkel:

$$g_2 - g_3 = 0, \quad g_3 - g_1 = 0, \quad g_1 - g_2 = 0$$

und der Halbierungslinien der entsprechenden Auſsenwinkel:

$$g_2 + g_3 = 0, \quad g_3 + g_1 = 0, \quad g_1 + g_2 = 0.$$

Addiert man die drei ersten Gleichungen (man habe immer vor Augen, welche Ausdrücke g_1, g_2, g_3 resp. bedeuten), so erhält man identisch Null, d. h. die drei Halbierungslinien der Dreieckswinkel gehen durch einen Punkt. In ähnlicher Weise kann man aber auch z. B. aus den Gleichungen:

$$g_2 - g_3 = 0, \quad g_3 + g_1 = 0, \quad g_1 + g_2 = 0$$

(indem man sie resp. mit 1, 1, — 1 multipliziert und addiert) identisch Null erhalten und so den Satz beweisen: Die Halbierungslinien je zweier Aufsenwinkel und des entsprechenden dritten Dreieckswinkels treffen sich in einem Punkte.

Aufg. 2. Bestimme (durch Reduktion auf die Normalform) die Gleichungen der Halbierungslinien von:

$$4x - 3y - 2 = 0 \quad \text{und} \quad 5y + 12x + 3 = 0$$

und zeige, dafs sie auf einander senkrecht stehen.

Aufg. 3. Löse dieselbe Aufgabe für die Geraden:

$$y = \mu_1 x + b_1, \quad y = \mu_2 x + b_2.$$

Aufg. 4. Zeige, dafs die Gleichungen der Winkelhalbierenden der Geraden:

$$A_1 x + B_1 y + C_1 = 0 \quad \text{und} \quad A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$$

sich in der Form:

$$\frac{A_1 x + B_1 y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \pm \frac{A_2 x + B_2 y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

darstellen lassen.

Aufg. 5. Unter Benutzung derselben Bezeichnungen und Voraussetzungen wie in Aufg. 1 ist zunächst einzusehen, dafs $g_1 + g_2 + g_3 = 0$ die Gleichung einer Geraden ist, welche durch den Schnittpunkt von $g_1 = 0$ und $g_2 + g_3 = 0$ hindurchgeht (§ 26). Daraus ist dann folgender Satz leicht abzuleiten: Die Halbierungslinien der drei Aufsenwinkel eines Dreiecks schneiden die gegenüberliegenden Seiten in dre Punkten, welche in derselben Geraden liegen. Die Gleichung dieser Geraden ist $g_1 + g_2 + g_3 = 0$.

Aufg. 6. Ebenso ist zu zeigen, dafs $g_1 - g_2 - g_3 = 0$ die Gleichung einer Geraden ist, welche durch den Schnittpunkt von $g_1 = 0$ und $g_2 + g_3 = 0$, aber auch durch den Schnittpunkt von $g_2 = 0$ und $g_3 - g_1 = 0$ und endlich auch durch den Schnittpunkt von $g_3 = 0$ und $g_1 - g_2 = 0$ hindurchgeht. Dies führt zu dem Satze: Die Halbierungslinien zweier innerer Winkel und des dritten Aufsenwinkels eines Dreiecks schneiden die gegenüberliegenden Seiten in Punkten einer Geraden. Solcher Geraden giebt es dann aber drei, ihre Gleichungen sind:

$$g_1 - g_2 - g_3 = 0, \quad g_2 - g_3 - g_1 = 0, \quad g_3 - g_1 - g_2 = 0.$$

Aufg. 7. Sind $g_1 = 0$ und $g_2 = 0$ die Gleichungen zweier Geraden, so stellt (§ 26) $g_1 - kg_2 = 0$ die Gleichung eines beliebigen durch den Schnittpunkt von $g_1 = 0$ und $g_2 = 0$ gehenden Strahles dar. Für einen beliebigen Punkt (x, y) eines solchen folgt dann aus $g_1 - kg_2 = 0$ die Gleichung $k = \frac{g_1}{g_2}$. Berücksichtigt man nun die geometrische Bedeutung von g_1 und g_2, so folgt aus der zugehörigen Figur leicht, dafs k das Verhältnis der Sinus der beiden Winkel bedeutet, welche $g_1 - kg_2 = 0$ mit $g_1 = 0$ und $g_2 = 0$ bildet. Welche speziellen Strahlen erhält man für $k = 1, -1, 0, \infty$?

§ 28. Sätze aus der Theorie der Transversalen. Das vollständige Viereck.

I. Die Seiten $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ des Dreiecks ABC mögen von einer beliebigen Geraden (Transversalen) in den Punkten A_1, B_1, C_1 getroffen werden, denen die Teilverhältnisse:

Fig. 20.

$$\frac{BA_1}{A_1C} = \lambda, \quad \frac{CB_1}{B_1A} = \mu,$$
$$\frac{AC_1}{C_1B} = \nu$$

zukommen mögen, welche sie mit den Dreiecksseiten bilden. Dann ist klar, dafs durch λ und μ die Transversale und folglich auch ν eindeutig bestimmt sind. Es mufs also zwischen λ, μ, ν eine Relation bestehen, welche wir suchen wollen.

Zu diesem Zwecke wählen wir CB zur x-Achse und CA zur y-Achse eines schiefwinkligen Systems. Dann folgt aus § 9, dafs die Abscisse von A_1 gleich $\frac{a}{1+\lambda}$ und die Ordinate von B_1 gleich $\frac{\mu b}{1+\mu}$ ist. Die Gleichungen von AB und A_1B_1 sind daher (§ 18):

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$
$$\frac{x}{a}(1+\lambda) + \frac{y}{b}\,\frac{1+\mu}{\mu} = 1.$$

Daraus ergiebt sich die Abscisse des Schnittpunktes C_1 (§ 23) gleich $\frac{a}{1+\mu\lambda}$. Dieselbe ist aber auch andrerseits gleich $\frac{\nu a}{1+\nu}$, insofern C_1 in Bezug auf die Strecke AB das Teilverhältnis ν besitzt. Aus:

$$\frac{\nu a}{1+\nu} = \frac{a}{1-\mu\lambda}$$

folgt aber:

(1) $$\lambda\mu\nu = -1.$$

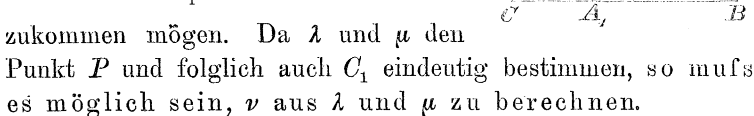
Dies ist die gewünschte Relation, die aber in dieser Form natürlich nur besteht, wenn man auch auf den Richtungssinn der in Betracht kommenden Strecken die nötige Rücksicht nimmt. Gleichung (1) heifst ausführlicher:

$$\frac{BA_1 \cdot CB_1 \cdot AC_1}{A_1C \cdot B_1A \cdot C_1B} = -1.$$

II. Verbindet man einen beliebigen Punkt P mit den Ecken A, B, C eines Dreiecks, so treffen diese Verbindungslinien die gegenüberliegenden Seiten in Punkten A_1, B_1, C_1, denen die Teilverhältnisse:

$$\frac{BA_1}{A_1C} = \lambda, \quad \frac{CB_1}{B_1A} = \mu,$$
$$\frac{AC_1}{C_1B} = \nu$$

Fig. 21.



zukommen mögen. Da λ und μ den Punkt P und folglich auch C_1 eindeutig bestimmen, so mufs es möglich sein, ν aus λ und μ zu berechnen.

Indem wir uns desselben Koordinatensystems bedienen wie bei I, erhalten wir wieder für A_1 die Abscisse $\frac{a}{1+\lambda}$, für B_1 die Ordinate $\frac{\mu b}{1+\mu}$, so dafs die Gleichungen von AA_1 und BB_1 geschrieben werden können:

$$\frac{x}{a}(1+\lambda) + \frac{y}{b} = 1,$$
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\,\frac{1+\mu}{\mu} = 1.$$

Durch Subtraktion erhält man:

$$\frac{x}{a}\lambda - \frac{y}{b}\,\frac{1}{\mu} = 0,$$

als die Gleichung einer durch P gehenden Geraden (§ 26), welche, da das absolute Glied fehlt, keine andere sein kann als CC_1. Aus der Gleichung von CC_1 und der Gleichung $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ von AB findet man die Abscisse $\frac{a}{1 + \lambda\mu}$ des Punktes C_1, der andrerseits durch die Abscisse $\frac{a\nu}{1+\nu}$ bestimmt ist. Aus:

$$\frac{a\nu}{1+\nu} = \frac{a}{1 + \lambda\mu}$$

folgt aber:

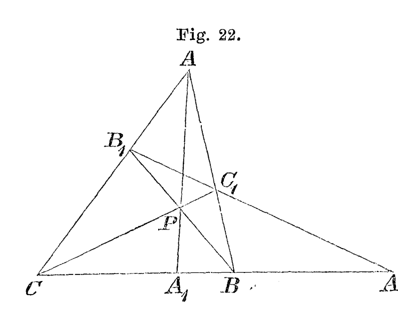
$$(2) \qquad \lambda\mu\nu = + 1.$$

Ist speziell $\lambda = \mu = 1$, so folgt aus $\nu = 1$, dafs die drei Mittellinien eines Dreiecks sich in einem Punkte schneiden. Gleichung (2) heifst ausführlicher:

$$\frac{BA_1 \,.\, CB_1 \,.\, AC_1}{A_1C \,.\, B_1A \,.\, C_1B} = + 1.$$

III. In folgender Weise lassen sich die Resultate von I und II kombinieren. Wir verbinden B_1C_1 durch eine Transversale, welche die Seite BC in dem Punkte A_1' treffen möge. A_1' bildet dann mit BC das Teilverhältnis $\frac{BA_1'}{A_1'C}$, welches wir mit λ' bezeichnen. Bedeuten dann wieder λ, μ, ν die Teilverhältnisse von A_1, B_1, C_1, so kann man zunächst auf die Transversale $B_1C_1A_1'$ den Satz I anwenden und erhält:

Fig. 22.



$$\lambda'\mu\nu = - 1.$$

Andrerseits ist infolge von Satz II:

$$\lambda\mu\nu = + 1,$$

woraus sich ergiebt, dafs:

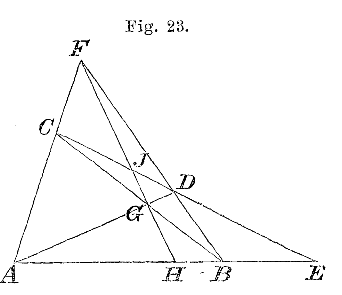
$$\lambda' = - \lambda$$

ist, d. h. dafs die Punkte B, C, A_1, A_1' harmonische Punkte und A_1, A_1' einander zugeordnet sind.

Seien jetzt vier beliebige Punkte $ABCD$ gegeben, so kann man sie als die Ecken eines vollständigen Vierecks mit den

sechs Seiten AB, CD; AC, BD; AD, BC betrachten, welche sich noch in den Diagonalpunkten E, F, G treffen. Verbindet man dann F mit G durch eine Gerade, welche AB in H, CD in J schneidet, so erkennt man leicht, dafs A, B durch E, H und ebenso C, D durch E, J harmonisch getrennt werden. Man braucht nämlich nur den soeben bewiesenen, aus der Kombination von I und II hervorgegangenen Satz das eine Mal anzuwenden auf das Dreieck ABF mit der Transversalen CD und dem Punkte G, das andere Mal auf das Dreieck CDF mit der Transversalen AB und dem Punkte G. In ähnlicher Weise erkennt man, dafs die Verbindungslinie EG die Seiten AC und BD in Punkten trifft, die mit F als zugeordnetem Punkte A, C resp. B, D harmonisch trennen. Und endlich schneidet auch die Verbindungslinie EF die Seiten AD und BC in Punkten, die mit G als zugeordnetem Punkte die Punkte A, D und B, C harmonisch trennen. So erhalten wir also durch Verbindung der drei Diagonalpunkte E, F, G auf jeder der sechs Seiten des vollständigen Vierecks harmonische Gruppen. Diese harmonischen Eigenschaften des vollständigen Vierecks gestatten, in einfacher Weise, durch Anwendung des Lineals allein, zu drei gegebenen Punkten den vierten harmonischen Punkt zu konstruieren.

Fig. 23.



Aufg. Es sind drei Punkte A, B, C gegeben. Man suche den vierten harmonischen, C zugeordneten Punkt a) wenn C zwischen A und B, b) wenn C aufserhalb der Strecke AB sich befindet.

§ 29. Geometrische Örter.

Unter dem geometrischen Ort eines Punktes versteht man bekanntlich eine Linie, deren sämtliche Punkte einer und derselben Bedingung unterworfen sind. Denkt man sich, unter Zugrundelegung eines Koordinatensystems, diese Bedingung durch die Koordinaten x, y des Punktes, dessen Ort bestimmt

werden soll, ausgedrückt, so erhält man eine Gleichung zwischen x und y, die allemal, aber auch nur dann erfüllt wird, wenn der Punkt (x, y) dem gesuchten Orte angehört und die man daher als die Gleichung des Ortes bezeichnen kann. Die folgenden Aufgaben sollen dies noch weiter erläutern.

Aufg. 1. Den Ort des Punktes zu bestimmen, der von zwei festen Punkten (a_1, b_1) und (a_2, b_2) denselben Abstand hat.

Bezeichnet man die rechtwinkligen Koordinaten des Punktes, dessen Ort bestimmt werden soll, mit x, y, so sind diese der Bedingung unterworfen:

$$(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 = (x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 \quad (\S\ 8),$$

aus der durch einfache Reduktion folgt:

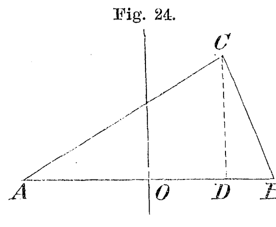
$$2(a_2 - a_1)\,x + 2\,(b_2 - b_1)\,y = a_2^2 - a_1^2 + b_2^2 - b_1^2.$$

Dies ist aber die Gleichung einer Geraden, welche im Mittelpunkte $\left(\frac{a_1 + a_2}{2}, \frac{b_1 + b_2}{2}\right)$ der Verbindungslinie der gegebenen Punkte auf dieser senkrecht steht (§ 24).

Aufg. 2. Von einem Dreieck seien gegeben die Basis und die Differenz der Quadrate der Seiten; man sucht den Ort der Spitze.

Wir wählen die Basis $AB = 2c$ zur Abscissenachse eines rechtwinkligen Achsensystems mit dem Mittelpunkte O von AB als Anfangspunkt. Dann haben wir die Bedingung:

Fig. 24.



$$AC^2 - BC^2 = d^2$$

(wo d^2 die gegebene Differenz ist) durch die Koordinaten x, y der Spitze C auszudrücken. Es ist aber:

$$AC^2 = (c + x)^2 + y^2, \quad BC^2 = (c - x)^2 + y^2,$$

folglich:

$$AC^2 - BC^2 = 4\,cx = d^2$$

oder:

$$x = \frac{d^2}{4c},$$

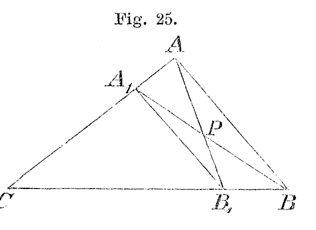
d. h. der Ort ist die Senkrechte, die man im Abstande $\frac{d^2}{4c}$ vom Mittelpunkte der Basis auf dieser errichten kann.

Bei vielen Aufgaben, die sich auf geometrische Örter beziehen, ist es nicht möglich, die Bedingung, welcher der veränderliche Punkt unterworfen ist, direkt durch eine zwischen den Koordinaten x, y derselben bestehende Gleichung auszudrücken. Man ist vielmehr vielfach genötigt, zunächst x und y einzeln durch andere Veränderliche auszudrücken oder Relationen zwischen x, y und diesen anderen Veränderlichen herzustellen und man erhält dann die Gleichung des Ortes erst durch Elimination dieser Veränderlichen. Solche veränderliche Hülfsgröfsen nennt man dann Parameter. Wir geben hierfür einige Beispiele.

Aufg. 3. Zu der einen Seite eines Dreiecks werden Parallelen gezogen und die mit den beiden anderen Seiten des Dreiecks gebildeten Schnittpunkte jedesmal mit den Gegenpunkten verbunden. Man sucht den Ort des Schnittpunktes dieser Verbindungslinien.

Man wähle CB und CA als Koordinatenachsen eines schiefwinkligen Systems. Da die Achsenabschnitte der zur dritten Dreieckseite AB parallelen Geraden A_1B_1 den Seiten $CB = a$ und $CA = b$ proportional sind, so kann man sie durch λa und λb ausdrücken, insofern wir unter λ einen veränderlichen Parameter verstehen. Jeder der unzählig vielen Parallelen entspricht dann ein ganz bestimmter Wert von λ und umgekehrt gehört zu jedem λ eine ganz bestimmte Parallele zu AB.

Fig. 25.



Die Gleichungen von A_1B und AB_1 lauten nun:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{\lambda b} = 1 \quad \text{und} \quad \frac{x}{\lambda a} + \frac{y}{b} = 1.$$

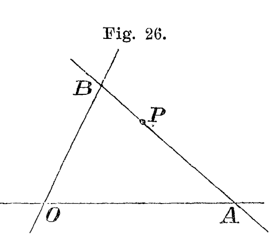
Hier haben wir also zwei Relationen zwischen x, y und λ. Aus diesen kann man eine einzige herstellen, in welcher λ fehlt, dadurch dafs man die zweite Gleichung von der ersten subtrahiert und dann mit $1 - \frac{1}{\lambda}$ dividiert. Man erhält:

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$$

als Gleichung des gesuchten Ortes. Dieser ist demnach die durch C gehende Mittellinie des Dreiecks (§ 25, Aufg. 6).

Aufg. 4. In einem schiefwinkligen Achsensystem bewege sich eine Gerade so, dafs die Summe ihrer Achsenabschnitte konstant ist. Jedesmal werde das zwischen den Achsen befindliche Stück der Geraden durch einen Punkt in einem konstanten Teilverhältnis geteilt. Welches ist der Ort dieses Punktes?

Fig. 26.



Es sei: $OA = a$, $OB = b$, $a + b = c$ und $\frac{AP}{PB} = \lambda$. Die Koordinaten von P heifsen dann:

$$x = \frac{a}{1+\lambda}, \quad y = \frac{\lambda b}{1+\lambda}.$$

Fügt man zu diesen beiden Gleichungen noch $a + b = c$, so hat man drei Gleichungen zwischen x und y und den beiden Parametern a und b. Um diese letzteren zu eliminieren, löse man die beiden ersten Gleichungen nach a und b auf, was zu:

$$a = (1+\lambda)x, \quad b = \frac{1+\lambda}{\lambda} y$$

führt, und setze diese Werte in $a + b = c$ ein. Die Gleichung des gesuchten Ortes lautet dann:

$$\lambda x + y = \frac{\lambda c}{1+\lambda}$$

und stellt eine Gerade dar mit dem Richtungskoefficienten $-\lambda$ und den Achsenabschnitten $\frac{c}{1+\lambda}$ und $\frac{\lambda c}{1+\lambda}$.

§ 30. Hauptaufgabe und Methode der analytischen Geometrie.

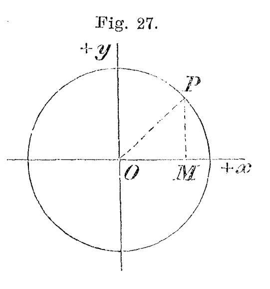
Durch die bisherigen Untersuchungen haben wir einen eigentümlichen Zusammenhang kennen gelernt zwischen einem geometrischen Gebilde, nämlich einer geraden Linie, einerseits und einer algebraischen Gleichung mit zwei Unbekannten andrerseits. Wir sahen, dafs zu jeder geraden Linie eine Gleichung mit zwei Unbekannten x und y gehört, welche in Bezug auf diese vom ersten Grade ist, und welche allemal aber auch nur dann erfüllt wird, wenn x und y die Koordinaten eines Punktes der Geraden darstellen. Umgekehrt konnten

wir jede Gleichung von der Form $Ax + By + C = 0$ als die Gleichung einer geraden Linie deuten. (Wegen dieses Zusammenhanges nennt man auch die Gleichung: $Ax + By + C = 0$ eine lineare Gleichung.)

Es drängt sich nun die Frage auf, ob unter Zugrundelegung eines bestimmten Koordinatensystems für jede durch ein bestimmtes mathematisches Gesetz definirte Curve eine Gleichung mit zwei Unbekannten x und y gefunden werden kann, welche allemal aber auch nur dann befriedigt wird, wenn x und y die Koordinaten eines Punktes der Kurve bedeuten, und ob umgekehrt jede zwischen zwei Unbekannten x und y bestehende Gleichung in der angegebenen Weise als Gleichung einer bestimmten Kurve gedeutet werden kann.

Die in dem vorhergehenden Paragraphen an einzelnen Beispielen entwickelten Methoden führen zur Beantwortung dieser Fragen. Denn denken wir uns eine Kurve als den geometrischen Ort eines Punktes definiert, welcher einer bestimmten Bedingung unterworfen ist, so hat man nur diese Bedingung durch die Koordinaten des Punktes, dessen Ort die gegebene Kurve ist, auszudrücken und erhält eine Gleichung zwischen x und y, welche allemal und nur dann erfüllt wird, wenn x und y die Koordinaten eines Punktes der Kurve bedeuten. Definiert man z. B. den Kreis als den Ort eines Punktes, dessen Abstand von einem festen Punkte, den wir zum Anfangspunkte eines rechtwinkligen Koordinatensystems wählen wollen, konstant gleich r ist, so läſst sich die dem Punkte P auferlegte Bedingung durch die Gleichung $x^2 + y^2 = r^2$ ausdrücken. Diese Gleichung gilt für alle Punkte des Kreises mit dem Radius r, aber auch nur für diese. Für jeden Punkt innerhalb des Kreises ist $x^2 + y^2 < r^2$, für jeden Punkt auſserhalb des Kreises ist $x^2 + y^2 > r^2$.

Fig. 27.



Wir werden demnach die Gleichung $x^2 + y^2 = r^2$ (weil ausschlieſslich den Punkten des Kreises zukommend) als die Gleichung des Kreises mit dem Radius r bezeichnen, indem wir definieren:

Unter der Gleichung einer Kurve in Bezug auf ein gegebenes Koordinatensystem versteht man eine Gleichung zwischen zwei Unbekannten x und y, welche allemal aber auch nur dann erfüllt wird, wenn x und y die Koordinaten eines Punktes der Kurve bedeuten.

Für den Fall einer geraden Linie, aber auch nur dann, ist diese Gleichung in Bezug auf x und y linear.

Umgekehrt läfst sich jede Gleichung zwischen zwei Unbekannten x und y in dem angegebenen Sinne als die Gleichung einer Kurve deuten. Denn man kann in einer solchen Gleichung der einen Unbekannten, etwa x, einen beliebigen Wert beilegen und dann die Gleichung nach der andern Unbekannten auflösen. Dadurch erhält man ein Wertepaar x, y, welches der Gleichung genügt und welches man geometrisch durch einen Punkt repräsentiert mit der Abscisse x und der Ordinate y. Wiederholt man dieses Verfahren, indem man x alle möglichen Werte giebt und jedesmal das zugehörige y berechnet, so erhält man eine Aufeinanderfolge von Punkten, die sich zu einer Kurve vereinigen.

Nach diesen Auseinandersetzungen ist z. B. klar, wie man analytisch die Durchschnittspunkte von zwei durch ihre Gleichungen gegebenen Kurven bestimmt. Die Koordinaten der gemeinschaftlichen Punkte müssen den beiden Kurvengleichungen gleichzeitig genügen und man erhält sie daher als die gemeinschaftlichen Lösungen derselben. Auf diese Weise wird das uspründlich geometrische Problem in ein rein algebraisches verwandelt.

Wir können nunmehr als das Wesen der analytischen Geometrie die Anwendung algebraischer Methoden auf die Untersuchung geometrischer Gebilde bezeichnen; ihre Aufgabe besteht darin, Kurven in dem oben definierten Sinne durch Gleichungen zu repräsentieren und aus deren Eigenschaften die charakteristischen Eigentümlichkeiten der zugehörigen Kurven zu ergründen.

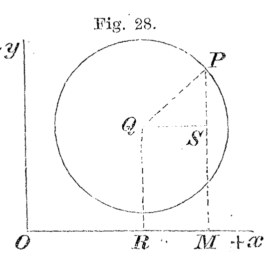
Drittes Kapitel.

Der Kreis.

§ 31. Die Gleichung des Kreises.

Im vorhergehenden Paragraphen wurde die Gleichung des Kreises abgeleitet für den Fall, dafs der Mittelpunkt zum Anfangspunkt eines rechtwinkligen Achsensystems gewählt worden war. Seien jetzt allgemeiner p, q die rechtwinkligen Koordinaten*) des Mittelpunktes eines Kreises und r der Radius. Um die Gleichung des Kreises zu erhalten, hat man nur auszudrücken, dafs jeder Punkt (x, y) des Kreises vom Mittelpunkte (p, q) desselben den konstanten Abstand r besitzt. Dies führt aber (§ 8) zu der Gleichung:

Fig. 28.



(1) $$(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2.$$

Diese Gleichung wird allemal aber auch nur dann erfüllt, wenn der Punkt (x, y) auf dem Kreise liegt. Für jeden Punkt innerhalb des Kreises ist die linke Seite der Gleichung (1) kleiner, für jeden Punkt aufserhalb des Kreises gröfser als r^2.

Aus der allgemeinen Gleichung (1) ergeben sich die speziellen Formen der Kreisgleichung durch besondere Wahl des Mittelpunktes. Liegt dieser auf der x-Achse, so erhält man wegen $q = 0$ die Gleichung:

(2) $$(x - p)^2 + y^2 = r^2.$$

Berührt überdies noch der Kreis die y-Achse, d. h. ist auch $p = r$, so folgt:

(3) $$x^2 + y^2 - 2rx = 0.$$

Befindet sich der Mittelpunkt auf der y-Achse, so lautet die Kreisgleichung:

---

*) In diesem ganzen Kapitel sollen nur rechtwinklige Koordinaten zur Anwendung kommen.

(4) $$x^2 + (y - q)^2 = r^2,$$
welche sich auf:
(5) $$x^2 + y^2 - 2ry = 0$$
reduciert, wenn aufserdem noch der Kreis die x-Achse berührt.

Fällt der Mittelpunkt mit dem Anfangspunkt zusammen (§ 30), so heifst die Kreisgleichung:
(6) $$x^2 + y^2 = r^2.$$
Endlich erhält man für einen beliebigen durch den Anfangspunkt gehenden Kreis, dessen Mittelpunkt die Koordinaten p, q besitzt, wegen $p^2 + q^2 = r^2$, die Gleichung:
(7) $$x^2 + y^2 - 2px - 2qy = 0.$$

Da Gleichung (1) durch Multiplikation mit einer beliebigen Konstanten a in ihrer Bedeutung nicht geändert wird, so erkennt man:

Die allgemeine Gleichung eines Kreises ist eine in Bezug auf x und y quadratische Gleichung, in welcher das Glied mit xy fehlt und die Glieder mit x^2 und y^2 denselben Koefficienten besitzen, sie ist also von der Form:
(8) $$ax^2 + ay^2 + bx + cy + d = 0.$$

Umgekehrt läfst sich zeigen, dafs jede Gleichung dieser Form als die Gleichung eines Kreises angesehen werden kann.

Dividiert man nämlich Gleichung (8) durch a, so kann man sie leicht auf die Form bringen:
(9) $$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(y + \frac{c}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c^2}{4a^2} - \frac{d}{a}$$
oder:
$$(x - p_1)^2 + (y - q_1)^2 = r_1^2,$$
insofern man zur Abkürzung setzt:
$$p_1 = -\frac{b}{2a}, \quad q_1 = -\frac{c}{2a}, \quad r_1 = \frac{\sqrt{b^2 + c^2 - 4ad}}{2a}$$
d. h. Gleichung (9) und folglich auch Gleichung (8) ist die Gleichung eines Kreises mit dem Mittelpunkte (p_1, q_1) und dem Radius r_1. Dabei ist allerdings vorausgesetzt, dafs r_1 reell, d. h. dafs $b^2 + c^2 - 4ad > 0$ sei.

Ist $b^2 + c^2 - 4ad < 0$, so kann der Gleichung (9) durch

kein reelles Wertepaar (x, y) genügt werden, folglich hat dann auch Gleichung (8) keine geometrische Bedeutung.

Aufg. 1. Wie heifst die Gleichung des Kreises mit dem Mittelpunkte $(-3, -5)$ und dem Radius $r = 4$? Liegt der Anfangspunkt innerhalb oder aufserhalb des Kreises?

Aufg. 2. Die Gleichung des durch den Anfangspunkt gehenden Kreises mit dem Mittelpunkte $(2, -3)$ zu finden.

Aufg. 3. Wie heifst die Gleichung des Kreises, dessen Mittelpunkt $(5, 0)$ ist und welcher die Gerade $x - y = 0$ berührt?

Aufg. 4. Bestimme die Schnittpunkte des Kreises:

$$a(x^2 + y^2) + bx + cy + d = 0$$

mit den Achsen und zeige, dafs das Produkt der beiden auf der x-Achse gebildeten (vom Anfangspunkt aus gerechneten) Achsenabschnitte gleich dem Produkt der auf der y-Achse gebildeten Abschnitte ist.

Aufg. 5. Es seien m_1, m_2, n_1, n_2 vier Zahlen, welche der Relation $m_1 m_2 = n_1 n_2$ genügen. Bestimme die Gleichung des Kreises mit den Achsenabschnitten m_1, m_2, n_1, n_2.

Aufg. 6. Finde den Mittelpunkt und den Radius des Kreises:

$$2(x^2 + y^2) - 2x + 6y - 3 = 0.$$

Aufg. 7. Die Gleichungen aller Kreise zu finden, welche die x-Achse im Punkte $x = a$ berühren.

Aufg. 8. Die Gleichungen aller Kreise zu finden, welche beide Koordinatenachsen berühren.

Aufg. 9. Die Gleichung des um den Anfangspunkt beschriebenen Kreises zu finden, welcher durch den Punkt $(-5, 3)$ geht.

Aufg. 10. Die Gleichung des um den Anfangspunkt beschriebenen Kreises zu finden, welcher die Gerade:

$$Ax + By + C = 0$$

berührt.

Aufg. 11. Die Gleichung des Kreises zu finden, dessen Mittelpunkt $(3, -2)$ ist und welcher die Gerade $y = 7x + 11$ berührt.

§ 32. Bestimmung eines Kreises durch drei Punkte.

Dividiert man die allgemeine Kreisgleichung:

$$ax^2 + ay^2 + bx + cy + d = 0$$

durch a, wodurch die Form:

$$x^2 + y^2 + b'x + c'y + d' = 0$$

entsteht, so erkennt man, dafs dieselbe im Grunde genommen nur drei Konstanten enthält, wie auch die Form:

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$$

zeigt. Daraus folgt, dafs man einen Kreis stets so bestimmen kann, dafs er drei vorgeschriebenen Bedingungen genügt, z. B. so, dafs er durch drei gegebene Punkte hindurch geht. Sind diese (x_1, y_1); (x_2, y_2); (x_3, y_3), so mufs sein:

$$x_1^2 + y_1^2 + b'x_1 + c'y_1 + d' = 0,$$
$$x_2^2 + y_2^2 + b'x_2 + c'y_2 + d' = 0,$$
$$x_3^2 + y_3^2 + b'x_3 + c'y_3 + d' = 0.$$

Aus diesen Gleichungen ergeben sich die Unbekannten b', c', d'. Bei der Auflösung tritt der gemeinschaftliche Nenner:

$$x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)$$

oder:

$$x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_3y_1 - x_1y_3$$

auf, der nur dann verschwindet, wenn die drei gegebenen Punkte in einer Geraden liegen. In jedem andern Falle erhält man daher für b', c', d' bestimmte endliche Werte.

Aufg. 1. Die Gleichung des Kreises zu finden, der dem Dreieck (2, 3); (— 5, 1); (3, — 2) umschrieben ist.

Aufg. 2. Die Gleichung des Kreises zu finden, der durch den Anfangspunkt und die beiden Punkte (x_1, y_1); (x_2, y_2) hindurchgeht.

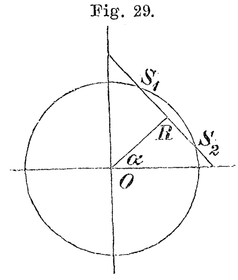
Aufg. 3. Bestimme in der im Texte angegebenen Weise b', c', d' und beweise, dafs der Radius $r = \frac{1}{2}\sqrt{b'^2 + c'^2 - 4d'}$ stets reell ist (§ 31).

Aufg. 4. Bestimme die Gleichung des Kreises, welcher die y-Achse im Anfangspunkt berührt und durch den Punkt (— 3, 2) geht.

§ 33. Der Kreis und die Gerade.

Um die Lage einer beliebigen Geraden in Bezug auf einen Kreis zu untersuchen, wählen wir den Mittelpunkt des letzteren zum Anfangspunkt eines rechtwinkligen Achsensystems und setzen die Gleichung der Geraden in der Normalform voraus.

Fig. 29.



Es mögen demnach:

(1) $x^2 + y^2 = r^2,$

(2) $x \cos \alpha + y \sin \alpha - \delta = 0$

die Gleichungen des Kreises und der Geraden darstellen.

Die Schnittpunkte ergeben sich, indem man etwa aus (2) y berechnet und in (1) einsetzt. Man erhält dann:

(3) $x^2 - 2\delta \cos \alpha \,.\, x + \delta^2 - r^2 \sin^2 \alpha = 0$

und diese in x quadratische Gleichung liefert die Abscissen der beiden Schnittpunkte. Die Realität der Wurzeln hängt von dem Vorzeichen der Discriminante:

$$\delta^2 \cos^2 \alpha - \delta^2 + r^2 \sin^2 \alpha = \sin^2 \alpha (r^2 - \delta^2)$$

ab, woraus man erkennt, dafs jede Gerade den gegebenen Kreis in zwei reellen und von einander verschiedenen, in zwei reellen und zusammenfallenden Punkten oder gar nicht schneidet, je nachdem $r \gtreqless \delta$ d. h. je nachdem der Abstand der Geraden vom Mittelpunkte des Kreises kleiner, gleich oder gröfser ist wie der Radius.

Nehmen wir an, die Schnittpunkte seien reell — wir wollen sie mit S_1 und S_2 bezeichnen — und besäfsen die Koordinaten x_1, y_1 und x_2, y_2; dann erhalten wir aus (3) ohne aufzulösen die Abscisse $\frac{x_1 + x_2}{2}$ des Mittelpunktes der Sehne $S_1 S_2$, nämlich:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \delta \cos \alpha \,.$$

Führt man diesen Wert in (2) ein, so findet man die zugehörige Ordinate:

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2} = \delta \sin \alpha \,.$$

Aus diesen Gleichungen für x und y aber folgt:

$$y = x \operatorname{tg} \alpha$$

d. h. er Mittelpunkt der Sehne $S_1 S_2$ liegt auf dem Lote, welches man vom Kreismittelpunkte aus auf die Sehne fällen kann. Da nun zu parallelen Sehnen dasselbe Lot gehört, so ergiebt sich:

Die Mittelpunkte paralleler Sehnen liegen auf dem Lote, welches man vom Kreismittelpunkte aus auf diese Sehnen fällen kann.

Aufg. 1. Bestimme die Lage der Geraden:

$$2x - 7y + 1 = 0$$

zu dem Kreise $x^2 + y^2 = 9$ und eventuell die Koordinaten der Schnittpunkte.

Aufg. 2. Bestimme aus den Gleichungen $x = \delta \cos \alpha$, $y = \delta \sin \alpha$ den Ort der Mittelpunkte aller Sehnen, welche vom Kreismittelpunkte den konstanten Abstand δ besitzen. (Betrachte α als einen zu eliminierenden Parameter, § 29.)

Aufg. 3. Leite die sämtlichen Resultate des Textes ab für den Kreis $ax^2 + ay^2 + bx + cy + d = 0$ und die Gerade $Ax + By + C = 0$.

Aufg. 4. Bestimme die Lage der Geraden:

$$5y - x + 2 = 0$$

in Bezug auf den Kreis $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 9$ und eventuell die Koordinaten der Schnittpunkte.

§ 34. Die Tangente in einem Punkte des Kreises.

Im vorhergehenden Paragraphen haben wir gesehen, dafs die quadratische Gleichung, welche die Abscissen der Schnittpunkte der Geraden $x \cos \alpha + y \sin \alpha - \delta = 0$ mit dem Kreise $x^2 + y^2 = r^2$ bestimmt, zwei zusammenfallende Wurzeln besitzt, sobald der Abstand δ des Kreismittelpunktes O von der Geraden gleich dem Radius r wird. Die Gerade steht in diesem Falle im Endpunkte des entsprechenden Radius $\delta = r$ senkrecht auf diesem und wird dann bekanntlich eine *Tangente* des Kreises genannt. Um aber eine für *alle* Kurven gültige Definition der Tangente zu erhalten, gehen wir von

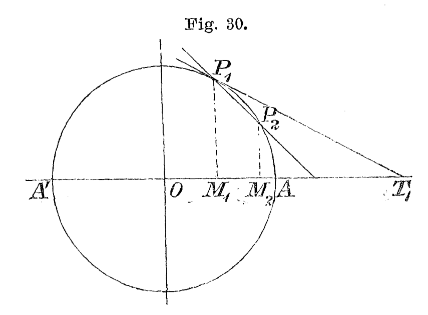
folgender Überlegung aus. Durch einen beliebigen Punkt P_1 des Kreises werde eine Sekante gezogen, welche den Kreis noch in einem zweiten Punkte P_2 trifft. Nunmehr möge sich die Sekante um den Punkt P_1 in dem Sinne drehen, dafs der zweite Schnittpunkt P_2 immer mehr und mehr sich dem Punkte P_1 nähere. In demselben Momente, in welchem die Gerade mit dem Radius OP_1 einen rechten Winkel einschliefst, d. h. zur Tangente wird, fällt der Punkt P_2 mit P_1 zusammen und umgekehrt.

Sei daher jetzt eine beliebige Kurve gegeben und auf derselben ein Punkt P_1. Durch diesen werde eine Sekante gezogen, welche die Kurve noch in einem zweiten Punkte P_2 treffen möge. Dreht sich nun die Sekante um P_1 in dem Sinne, dafs sich P_2 immer mehr dem Punkte P_1 nähert, so nennt man die Gerade in dem Momente, in welchem P_2 mit P_1 zusammengefallen ist, die Tangente der Kurve im Punkte P_1.

Diese Definition befindet sich also, auf den Kreis angewandt, wie wir oben gesehen haben, durchaus in Übereinstimmung mit der in Elementen gegebenen Definition der Kreistangente. Zugleich ist damit genau der Weg vorgezeichnet, den man einschlagen mufs, um für einen beliebigen Punkt P_1 des Kreises oder überhaupt einer Kurve die Gleichung der Tangente zu erhalten.

Die Punkte P_1 und P_2 des Kreises $x^2 + y^2 = r^2$ mögen

Fig. 30.



durch ihre Koordinaten x_1, y_1 resp. x_2, y_2 gegeben sein. Die Gleichung der Sekante $P_1 P_2$ lautet dann (§ 19):

(1) $$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

Da aber P_1 und P_2 auf dem Kreise liegen, so ist:

$$x_1^2 + y_1^2 = r^2, \quad x_2^2 + y_2^2 = r^2$$

und folglich:

$$x_2^2 - x_1^2 + y_2^2 - y_1^2 = 0$$

oder:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -\frac{x_2 + x_1}{y_2 + y_1},$$

wodurch Gleichung (1) übergeht in:

(2) $$y - y_1 = -\frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2}(x - x_1).$$

Um nun von der Gleichung der Sekante zu der Gleichung der Tangente überzugehen, hat man P_2 mit P_1 zusammenfallen zu lassen und demnach $x_2 = x_1$, $y_2 = y_1$ zu setzen. Man erhält:

$$y - y_1 = -\frac{x_1}{y_1}(x - x_1)$$

oder:

$$xx_1 + yy_1 = x_1^2 + y_1^2.$$

Da aber P_1 auf dem Kreise liegt, also $x_1^2 + y_1^2 = r^2$ ist, so erhält man als Gleichung der Tangente des Kreises $x^2 + y^2 = r^2$ im Punkte P_1:

(3) $$xx_1 + yy_1 = r^2.$$

In dieser Gleichung bedeuten x_1, y_1 die Koordinaten des Berührungspunktes P_1, während x, y, die laufenden Koordinaten, einen beliebigen Punkt der Tangente darstellen.

Es möge jetzt der Mittelpunkt des Kreises nicht mit dem Anfangspunkt zusammenfallen, sondern die Koordinaten p, q besitzen, sodafs die Gleichung des Kreises:

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$$

lautet.

Um die Gleichung der Tangente im Punkte (x_1, y_1) zu erhalten, legen wir durch den Mittelpunkt ein neues Achsensystem parallel und gleichgerichtet mit dem alten. Die neuen Koordinaten derjenigen Punkte, deren alte Koordinaten x, y resp. x_1, y_1 sind, mögen x', y' resp. x_1', y_1' heifsen. Die Gleichung der gesuchten Tangente, bezogen auf das neue System, lautet dann infolge (3):

$$x'x_1' + y'y_1' = r^2.$$

Da aber:

$$x' = x - p, \quad y' = y - q, \quad x_1' = x_1 - p, \quad y_1' = y_1 - q$$

ist, so findet man:

(4) $$(x - p)(x_1 - p) + (y - q)(y_1 - q) = r^2$$

als die Gleichung der Tangente des Kreises:

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$$

im Punkte (x_1, y_1).

Aufg. 1. Gegeben sei der Kreis $x^2 + y^2 = 25$. Zur Abscisse $x = 4$ gehören zwei Kreispunkte; bestimme die Gleichungen der zugehörigen Tangenten und zeige, dafs sie sich in einem Punkte der x-Achse treffen.

Aufg. 2. Bringe die Gleichung $xx_1 + yy_1 = r^2$ auf die Normalform und leite dieselbe (und damit auch die Gleichung $xx_1 + yy_1 = r^2$) an der Hand der Figur direkt ab (§ 22).

Aufg. 3. Bestimme den Richtungskoefficienten der Kreistangente $xx_1 + yy_1 = r^2$ und zeige, dafs die Tangente auf dem Radius des Berührungspunktes senkrecht steht.

Aufg. 4. Der Kreis $x^2 + y^2 = r^2$ treffe die x-Achse in den Punkten A und A'. Bestimme den Achsenabschnitt $x = OT_1$ der Tangente des Punktes P_1, dessen Abscisse $x_1 = OM_1$ ist und schliefse aus der Relation $xx_1 = r^2 = OA^2$, dafs A, A', M_1, T_1 harmonische Punkte sind (§ 4). Wie bewegt sich T_1, wenn M_1 die Strecke AA' durchläuft?

Aufg. 5. Unter welcher Bedingung ist die Gerade:

$$Ax + By + C = 0$$

eine Tangente des Kreises $x^2 + y^2 = r^2$?

Aufg. 6. Welche Beziehung mufs zwischen p, q, r, A, B, C stattfinden, damit die Gerade:

$$Ax + By + C = 0$$

den Kreis $(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$ berühre?

Aufg. 7. Bestimme mit Hilfe dieser Beziehung die Gleichung des Kreises, der dem Dreieck:

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0,$$
$$A_2x + B_2y + C_2 = 0,$$
$$A_3x + B_3y + C_3 = 0$$

eingeschrieben ist.

§ 35. Tangenten von einem Punkte aufserhalb des Kreises. Berührungssehne, Pol und Polare.

Von einem beliebigen Punkte (x_0, y_0) aus werde an den Kreis $x^2 + y^2 = r^2$ eine Tangente gelegt. Bezeichnet man die Koordinaten des Berührungspunktes mit x_1, y_1, so lautet die Gleichung der Tangente:

$$xx_1 + yy_1 = r^2,$$

und da dieselbe durch (x_0, y_0) hindurchgehen soll, so hat man:

(1) $$x_0 x_1 + y_0 y_1 = r^2.$$

Daraus folgt aber, dafs der Berührungspunkt (x_1, y_1) einer von dem Punkte (x_0, y_0) an den Kreis gezogenen Tangente auf der Geraden:

(2) $$xx_0 + yy_0 = r^2$$

liegen mufs.

Diese Gerade trifft den Kreis $x^2 + y^2 = r^2$ in zwei Punkten (§ 33) und es ist jetzt umgekehrt leicht einzusehen, dafs die Tangente in jedem dieser beiden Punkte durch (x_0, y_0) hindurchgeht. Denn bezeichnet man einen dieser Punkte mit x', y', so ist $x'x_0 + y'y_0 = r^2$. Diese Gleichung läfst sich aber auch so deuten, dafs sie aussagt, der Punkt (x_0, y_0) liege auf der zu (x', y') gehörigen Tangente $xx' + yy' = r^2$.

Zu jedem Punkte (x_0, y_0) der Ebene ergiebt sich eine ganz bestimmte zugehörige Gerade:

$$xx_0 + yy_0 = r^2.$$

Sie wird die Polare des Punktes (x_0, y_0) in Bezug auf den gegebenen Kreis, der Punkt (x_0, y_0) der Pol der Geraden:

$$xx_0 + yy_0 = r^2$$

genannt. Die Polare des Punktes (x_0, y_0) schneidet nach dem Obigen aus dem Kreise die Berührungspunkte der von (x_0, y_0) an den Kreis konstruierbaren Tangenten aus und heifst daher auch die Berührungssehne des Punktes (x_0, y_0). Da der Abstand dieser Polaren vom Mittelpunkte gleich $\frac{r^2}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}$ ist (§ 22), so erhält man zwei reelle und von einander verschiedene, zwei reelle aber zusammenfallende oder gar keine

Schnittpunkte, je nachdem (x_0, y_0) aufserhalb, auf dem Umfange, oder innerhalb des Kreises liegt. Im ersten Falle kann man daher von (x_0, y_0) aus zwei von einander verschiedene Tangenten an den Kreis legen, im zweiten Falle erhält man eine einzige mit der Berührungssehne zusammenfallende Tangente, im dritten Falle gar keine reellen Tangenten.

Aufg. 1. Die Berührungspunkte der Tangenten zu finden, die man von $(5, -3)$ an den Kreis $x^2 + y^2 = 16$ legen kann.

Aufg. 2. Finde durch Vergleichen mit $xx_0 + yy_0 = r^2$ den Pol der Geraden $Ax + By + C = 0$ in Bezug auf:

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

§ 36. Die Potenz eines Punktes in Bezug auf einen Kreis.

Zieht man durch einen beliebigen Punkt P_1 mit den Koordinaten x_1, y_1 eine unter dem Winkel φ gegen die x-Achse geneigte Gerade, so kann man die Koordinaten x, y eines jeden Punktes P der Geraden durch:

Fig. 31.

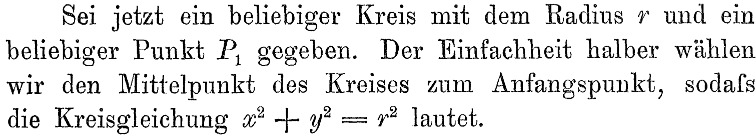
(1) $x = x_1 + \varrho \cos\varphi,\ y = y_1 + \varrho \sin\varphi$

ausdrücken, insofern $P_1P = \varrho$ gesetzt wird. Denn man hat

$$\cos\varphi = \frac{x - x_1}{\varrho},\ \sin\varphi = \frac{y - y_1}{\varrho}\ (\S\ 7 \text{ u. } 8).$$

Indem man ϱ alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ beilegt, erhält man aus (1) alle Punkte der unendlichen Geraden.

Sei jetzt ein beliebiger Kreis mit dem Radius r und ein beliebiger Punkt P_1 gegeben. Der Einfachheit halber wählen wir den Mittelpunkt des Kreises zum Anfangspunkt, sodafs die Kreisgleichung $x^2 + y^2 = r^2$ lautet.



Durch P_1 werde unter dem Winkel φ eine Gerade gezogen, deren Punkte durch (1) bestimmt sind. Soll nun ein beliebiger Punkt P dieser Geraden zugleich auf dem Kreise liegen, so mufs sein:

$$(x_1 + \varrho \cos\varphi)^2 + (y_1 + \varrho \sin\varphi)^2 = r^2,$$

oder:

$$\varrho^2 + 2\varrho\,(x_1 \cos\varphi + y_1 \sin\varphi) + x_1^{\,2} + y_1^{\,2} - r^2 = 0.$$



Diese in ϱ quadratische Gleichung liefert die beiden Schnittpunkte der Geraden mit dem Kreise (§ 33).

Da aber das Produkt der beiden Wurzeln, nämlich:

$$\varrho' \varrho'' = x_1^2 + y_1^2 - r^2$$

nur von der Lage des Punktes P_1, nicht aber von der durch φ bestimmten Richtung der durch P_1 gehenden Geraden abhängig ist, so folgt:

Zieht man von einem beliebigen Punkte Strahlen nach einem Kreise, von denen jeder den Kreis in zwei zusammengehörigen Punkten trifft, so ist das Produkt der Entfernungen zweier zusammengehöriger Schnittpunkte von dem gegebenen Punkte für alle Strahlen konstant.

Dieses konstante Produkt wird die Potenz des Punktes P_1 in Bezug auf den gegebenen Kreis genannt. Der Ausdruck $x_1^2 + y_1^2 - r^2$ zeigt, dafs die Potenz für einen Punkt aufserhalb des Kreises positiv, für einen Punkt auf dem Kreise Null, für einen Punkt innerhalb des Kreises negativ ist.

Dreht man, unter der Voraussetzung, dafs P_1 aufserhalb des Kreises liegt, den durch P_1 gehenden Strahl, bis er den Kreis berührt, so ergiebt sich, dafs die Potenz von P_1 gleich dem Quadrate der durch P_1 gehenden Tangente ist.

Aufg. 1. Man überzeuge sich, dafs die auf die Potenz bezüglichen Bemerkungen selbständig, also unabhängig von dem nur zur Ableitung eingeführten Koordinatensystem existieren.

Aufg. 2. Welches ist der Ort der Punkte, die in Bezug auf einen gegebenen Kreis dieselbe Potenz haben?

Aufg. 3. Welche Werte nimmt die Potenz eines Punktes an, welcher eine durch den Mittelpunkt des Kreises gehende unendliche Gerade durchläuft?

§ 37. Systeme von Kreisen. Potenzlinie.

So lange wir es nur mit einem Kreise zu thun haben, können wir der Einfachheit halber den Mittelpunkt als Anfangspunkt der Koordinaten betrachten und erhalten dann als Potenz des Punktes (x_1, y_1) der Ausdruck $x_1^2 + y_1^2 - r^2$.

Hat nun aber der Mittelpunkt die Koordinaten p, q, so lehrt eine einfache Parallelverschiebung der Achsen, dafs die Potenz des Punktes (x_1, y_1) in Bezug auf den Kreis:

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 - r^2 = 0$$

gleich:

$$(x_1 - p)^2 + (y_1 - q)^2 - r^2$$

ist.

Dies vorausgeschickt, seien jetzt:

$$(1) \qquad (x - p_1)^2 + (y - q_1)^2 - r_1^2 = 0,$$

$$(2) \qquad (x - p_2)^2 + (y - q_2)^2 - r_2^2 = 0$$

die Gleichungen zweier Kreise. Versteht man unter (x, y) einen ganz beliebigen Punkt, so stellt sich die linke Seite z. B. der Gleichung (1) als die Potenz des Punktes (x, y) in Bezug auf den ersten Kreis dar, ist also positiv, wenn (x, y) aufserhalb, Null, wenn (x, y) auf der Peripherie und negativ, wenn (x, y) innerhalb des ersten Kreises liegt. Analoges gilt für den zweiten Kreis. Bezeichnen wir daher zur Abkürzung die linken Seiten von (1) und (2) mit K_1 und K_2, so bedeuten K_1 und K_2 die Potenzen von (x, y) in Bezug auf die beiden Kreise. Soll der Punkt (x, y) so liegen, dafs diese beiden Potenzen einander gleich sind, so hat man nur $K_1 = K_2$ oder $K_1 - K_2 = 0$ zu setzen. Rechnet man aber aus, so fallen x^2 und y^2 weg und man erhält:

$$(3) \qquad 2x(p_2 - p_1) + 2y(q_2 - q_1) + p_1^2 + q_1^2 - r_1^2 - (p_2^2 + q_2^2 - r_2^2) = 0$$

als Gleichung des Ortes der Punkte, welche in Bezug auf die Kreise $K_1 = 0$ und $K_2 = 0$ gleiche Potenzen haben.

Diese Gleichung stellt aber, weil in Bezug auf x und y linear, eine gerade Linie dar. Man nennt sie die Potenzlinie (Chordale, Radikalachse) der beiden Kreise.

Wir ziehen es vor, für die Gleichung der Potenzlinie die Form $K_1 - K_2 = 0$ beizubehalten und erkennen daraus unmittelbar, dafs ein Punkt (x, y), welcher beiden Kreisen gemeinschaftlich ist, auch auf der Potenzlinie liegen mufs, denn wenn für einen Punkt (x, y) die Ausdrücke K_1 und K_2 einzeln verschwinden, so mufs für denselben Punkt auch die Verbindung $K_1 - K_2$ verschwinden. Aus dem gleichen

Grunde mufs jeder Schnittpunkt der Potenzlinie mit dem einen Kreise auch auf dem andern Kreise liegen. Denn wenn für einen Punkt (x, y) zugleich $K_1 - K_2$ und etwa K_1 verschwinden, so mufs für denselben Punkt auch K_2 gleich Null sein. Man erhält daher die Schnittpunkte zweier Kreise als die Schnittpunkte der Potenzlinie mit dem einen von ihnen. Zwei Kreise schneiden sich demnach entweder in zwei reellen und von einander verschiedenen Punkten — dann ist die Potenzlinie die gemeinschaftliche Sekante — oder in zwei reellen aber zusammengefallenen Punkten, d. h. sie berühren sich — dann ist die Potenzlinie die gemeinschaftliche Tangente — oder endlich sie schneiden sich gar nicht — dann hat auch die Potenzlinie mit keinem der Kreise einen Punkt gemein.

Aus der Gleichung (3) der Potenzlinie erkennt man, dafs dieselbe auf der Verbindungslinie:

$$x(q_2 - q_1) - y(p_2 - p_1) + p_2 q_1 - p_1 q_2 = 0$$

der beiden Kreismittelpunkte senkrecht steht (§ 24), wie auch aus Symmetriegründen evident ist.

Berücksichtigt man endlich, dafs für einen aufserhalb eines Kreises befindlichen Punkt die Potenz gleich dem Quadrate der durch den Punkt gehenden Kreistangente ist, so folgt:

I. Der Ort der Punkte, von denen aus man an zwei gegebene Kreise gleiche Tangenten legen kann, ist eine Gerade, nämlich die Potenzlinie der beiden Kreise.

Wir kombinieren jetzt mit den beiden Kreisen (1) und (2) einen dritten Kreis, dessen Gleichung:

$$(4) \qquad (x - p_3)^2 + (y - q_3)^2 - r_3^{\,2} = 0$$

oder abgekürzt $K_3 = 0$ sei.

Diese drei Kreise, zu je zweien kombiniert, geben zu drei Potenzlinien Veranlassung, deren Gleichungen wir abgekürzt schreiben:

$$K_2 - K_3 = 0,$$
$$K_3 - K_1 = 0,$$
$$K_1 - K_2 = 0.$$

Da aber durch Addition der Gleichungen die linke Seite identisch verschwindet, so folgt (§ 25):

II. Die drei Potenzlinien, die man zu je zweien von drei Kreisen konstruieren kann, schneiden sich in einem Punkte, den man den Potenzpunkt (Chordalpunkt, Radikalcentrum) der drei Kreise nennt.

Aufg. 1. Was wird aus Gleichung (3) der Potenzlinie zweier Kreise, wenn diese konzentrisch sind?

Aufg. 2. Wenn zwei Kreise sich rechtwinklig schneiden, so ist die von dem Mittelpunkte eines jeden der beiden Kreise an den andern gelegte Tangente gleich dem zugehörigen Radius. Unter welcher Bedingung durchschneiden sich demnach zwei durch ihre Gleichungen gegebene Kreise rechtwinklig?

Aufg. 3. Wie heifst die Gleichung des Kreises, dessen Mittelpunkt (3, — 4) ist und welcher den Kreis:

$$(x - 5)^2 + (y - 6)^2 = 9$$

rechtwinklig schneidet?

Aufg. 4. Finde die Schnittpunkte der beiden vorhergehenden Kreise mit Hilfe der Potenzlinie.

Aufg. 5. Die Kreise K_1 und K_2 mögen keinen Punkt mit einander gemein haben. Konstruiere ihre Potenzlinie mit Hilfe eines Kreises K_3, welche K_1 und K_2 schneidet, durch Anwendung des Satzes II.

Aufg. 6. Löse Aufgabe 3 durch Konstruktion.

Aufg. 7. Welche Beziehung mufs zwischen p_1, q_1, r_1; p_2, q_2, r_2 stattfinden, damit die beiden zugehörigen Kreise sich berühren?

Aufg. 8. Stelle die Gleichungen auf, aus denen man die Koordinaten des Mittelpunktes und den Radius eines Kreises zu berechnen hat, welcher durch zwei gegebene Punkte (x_1, y_1); (x_2, y_2) hindurchgeht und den Kreis:

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$$

berührt. Ohne die Gleichungen aufzulösen, überzeuge man sich, dafs zwei Lösungen existieren.

Aufg. 9. Man löse die vorhergehende Aufgabe durch Konstruktion, indem man durch die gegebenen Punkte P_1 und P_2 einen Kreis legt, welcher den gegebenen Kreis in zwei Punkten schneidet. Die Verbindungslinie dieser beiden Punkte, sowie die Linie P_1P_2 sind dann die Potenzlinien, welche der Hilfskreis mit dem gegebenen und dem gesuchten Kreise be-

stimmt. Die von dem Schnittpunkte dieser Potenzlinien an den gegebenen Kreis gelegten Tangenten führen dann zu den beiden Lösungen der Aufgabe.

Aufg. 10. $K_1 = 0$, $K_2 = 0$, $K_3 = 0$ seien die Gleichungen dreier Kreise. Diskutiere die Bedeutung der drei Gleichungen:

$$2K_1 - K_2 - K_3 = 0, \quad 2K_2 - K_3 - K_1 = 0,$$
$$2K_3 - K_1 - K_2 = 0 \text{ (§ 26 u. 27).}$$

Aufg. 11. Beweise, dafs der Ort des Punktes, dessen Potenzen in Bezug auf zwei Kreise $K_1 = 0$ und $K_2 = 0$ in dem konstanten Verhältnis $\lambda : 1$ zu einander stehen, der Kreis $K_1 - \lambda K_2$ ist, der durch die Schnittpunkte von K_1 und K_2 geht. Für $\lambda = 1$ erhält man welchen Specialfall?

Aufg. 12. Bestimme die Koordinaten des Mittelpunktes des Kreises $K_1 - \lambda K_2 = 0$ und diskutiere das Resultat.

Aufg. 13. Aus Aufg. 2 ergiebt sich, dafs die Bedingung dafür, dafs die beiden Kreise:

$$x^2 + y^2 + bx + cy + d = 0$$

und:

$$x^2 + y^2 + b_1 x + c_1 y + d_1 = 0$$

sich rechtwinklig schneiden, $bb_1 + cc_1 = 2(d + d_1)$ lautet. Man kann daher stets einen Kreis konstruieren, der drei gegebene Kreise rechtwinklig schneidet. Bestimme seine Gleichung und zeige, dafs sein Mittelpunkt das Radikalcentrum der drei gegebenen Kreise ist.

§ 38. Vermischte Aufgaben über den Kreis.

Aufg. 1. Den Ort der Punkte zu finden, für welche die Summe der Quadrate der Abstände von zwei festen Punkten konstant ist.

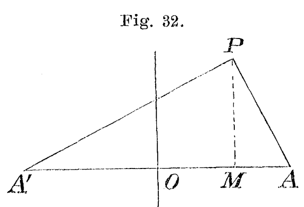


Fig. 32.

Die Verbindungslinie der gegebenen Punkte A und A', deren Entfernung $= 2c$ sei, werde zur x-Achse, ihre Mitte zum Anfangspunkt gewählt. Die Entfernungen des Punktes P, dessen Ort zu suchen ist, seien r und r' und es sei ferner $r^2 + r'^2 = d^2$. Nun folgt aus:

$$r^2 = (c - x)^2 + y^2 \quad \text{und} \quad r'^2 = (c + x)^2 + y^2$$

die Gleichung:

$$r^2 + r'^2 = 2c^2 + 2x^2 + 2y^2 = d^2,$$

d. h.:

$$x^2 + y^2 = \frac{d^2}{2} - c^2.$$

Der Ort ist also, so lange $d^2 > 2c^2$ ist, ein Kreis mit O als Mittelpunkt.

Aufg. 2. Den Ort des Punktes zu finden, für welchen das Verhältnis der Abstände von zwei festen Punkten konstant ist.

Wir wählen die Verbindungslinie der gegebenen Punkte A und B, deren Entfernung $= c$ sei, zur x-Achse und A zum Anfangspunkt. Ist dann $\frac{PA}{PB} = \varkappa$, so folgt aus:

Fig. 33.

$$PA^2 = x^2 + y^2, \quad PB^2 = (c - x)^2 + y^2$$

die Gleichung:

$$\frac{x^2 + y^2}{(c - x)^2 + y^2} = \varkappa^2$$

oder: $x^2(1 - \varkappa^2) + y^2(1 - \varkappa^2) + 2c\varkappa^2 x - c^2\varkappa^2 = 0$.

Dies ist aber die Gleichung eines Kreises. Schreibt man sie in der Form:

$$\left(x + \frac{c\varkappa^2}{1 - \varkappa^2}\right)^2 + y^2 = \frac{c^2\varkappa^2}{(1 - \varkappa^2)^2},$$

so erkennt man, dafs die Koordinaten des Mittelpunktes C und der Radius des Kreises durch $p = -c\frac{\varkappa^2}{1 - \varkappa^2}$, $q = 0$, $r = c\frac{\varkappa}{1 - \varkappa^2}$ definiert werden. Aus $AC = -c\frac{\varkappa^2}{1 - \varkappa^2}$ folgt: $CA = +c\frac{\varkappa^2}{1 - \varkappa^2}$, $CB = CA + AB = c\frac{\varkappa^2}{1 - \varkappa^2} + c = \frac{c}{1 - \varkappa^2}$.

Daher ist:

$$CA \,.\, CB = \frac{c^2\varkappa^2}{(1 - \varkappa^2)^2} = r^2,$$

d. h. der Kreis trifft die x-Achse in zwei Punkten, welche die Strecke AB harmonisch teilen (§ 4).

Aufg. 3. Von einem Dreieck kennt man die Basis $AB = c$ den gegenüberliegenden Winkel γ. Man suche den Ort der Spitze C des Dreiecks.

Bezeichnet man die Winkel bei A und B resp. mit α und β und wählt die Mitte von AB zum Anfangspunkt, AB selbst zur x-Achse, so erhält man, unter x, y die Koordinaten der Spitze C verstanden, die Gleichungen:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{\frac{c}{2} + x}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{y}{\frac{c}{2} - x}, \quad \operatorname{tg} \gamma = - \operatorname{tg} (\alpha + \beta).$$

Setzt man aber in $\operatorname{tg} \gamma = - \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$ die Werte von $\operatorname{tg} \alpha$ und $\operatorname{tg} \beta$ ein, so erhält man nach leichter Reduktion:

$$x^2 + y^2 - c \,.\, \operatorname{ctg} \gamma \,.\, y - \frac{c^2}{4} = 0$$

als Gleichung eines durch A und B gehenden Kreises. Bestimme den Mittelpunkt und den Radius desselben und zeige die Übereinstimmung mit der bekannten planimetrischen Lösung der Aufgabe.

Aufg. 4. Von einem Dreieck kennt man die Basis $AB = c$ und den gegenüberliegenden Winkel γ. Man suche den Ort des Schnittpunktes der drei Höhen.

Behält man die Dispositionen und Bezeichnungen der vorhergehenden Aufgabe bei und nennt die Winkel, welche die zu A und B gehörigen Höhen mit AB einschliefsen resp. α' und β', so findet man leicht $\alpha' + \beta' = \gamma$ und sodann wie früher:

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{y}{\frac{c}{2} + x}, \quad \operatorname{tg} \beta' = \frac{y}{\frac{c}{2} - x}.$$

Daraus ergiebt sich aber durch fast die gleiche Rechnung:

$$x^2 + y^2 + c \,.\, \operatorname{ctg} \gamma \,.\, y - \frac{c^2}{4} = 0,$$

d. h. der gesuchte Ort ist der Kreis, welcher zu dem in Aufg. 3 gefundenen Kreise in Bezug auf AB symmetrisch liegt.

Aufg. 5. Von einem beliebigen Punkte P_0 mit den gegebenen Koordinaten x_0, y_0 werden Strahlen nach allen Punkten P des Kreises $x^2 + y^2 = r^2$ gezogen und jedesmal die Strecke P_0P durch einen Punkt R in dem konstanten Teilverhältnis $\frac{P_0R}{RP} = \lambda$ geteilt. Welches ist der Ort der Teilpunkte R?

Bezeichnet man mit α die Anomalie eines beliebigen Kreis-

punktes P, so sind seine Koordinaten $r\cos\alpha$, $r\sin\alpha$ und demnach die Koordinaten von R (§ 9) gleich:

$$x = \frac{x_0 + \lambda r \cos\alpha}{1+\lambda}, \quad y = \frac{y_0 + \lambda r \sin\alpha}{1+\lambda}.$$

Um die Gleichung des Ortes zu erhalten, eliminieren wir den Parameter α (§ 29), indem wir nach $\cos\alpha$ resp. $\sin\alpha$ auflösen. Durch Quadrieren und Addieren der Gleichungen:

$$\cos\alpha = \frac{(1+\lambda)x - x_0}{\lambda r}, \quad \sin\alpha = \frac{(1+\lambda)y - y_0}{\lambda r}$$

folgt aber:

$$\left(x - \frac{x_0}{1+\lambda}\right)^2 + \left(y - \frac{y_0}{1+\lambda}\right)^2 = \frac{\lambda^2 r^2}{(1+\lambda)^2}.$$

In welcher Beziehung steht dieser Kreis nach Lage und Dimension zu dem gegebenen?

Viertes Kapitel.

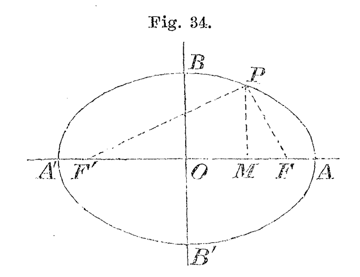
Die Ellipse.

§ 39. Definition und Gleichung.

Die Ellipse ist der Ort aller Punkte, für welche die Summe der Abstände von zwei festen Punkten konstant ist.

Die beiden festen Punkte F und F' nennt man die Brennpunkte, ihren halben Abstand die Exzentrizität der Ellipse. Die von irgend einem Punkte P der Ellipse nach den Brennpunkten gezogenen Strahlen heifsen Brennstrahlen.

Fig. 34.



Aus der Definition ergiebt sich die folgende mechanische Erzeugungsweise der Ellipse. Befestigt man in den beiden Brennpunkten F und F' die Enden eines Fadens, dessen Länge gröfser als FF' ist, und führt einen Stift so, dafs er den Faden fortwährend gespannt erhält, so beschreibt dieser Stift eine Ellipse. Aus dieser Ent-

stehungsweise erkennt man, wie auch aus der Definition, dafs die Ellipse eine geschlossene Figur ist. Um ihre Gleichung abzuleiten, wählen wir FF' als x-Achse und den Mittelpunkt von FF' als Anfangspunkt eines rechtwinkligen Achsensystems. Es sei:

$$FF' = 2c, \quad PF = r, \quad PF' = r'$$

und die konstante Summe der beiden Brennstrahlen r und r' gleich $2a$. Dann mufs $r + r' > 2c$, folglich $a > c$ sein. Nun ist:

$$r = \sqrt{(c-x)^2 + y^2}, \quad r' = \sqrt{(c+x)^2 + y^2};$$

man erhält daher als Gleichung der Ellipse:

(1) $$\sqrt{(c-x)^2 + y^2} + \sqrt{(c+x)^2 + y^2} = 2a.$$

Um dieselbe von den Wurzeln zu befreien, quadriere man, woraus sich ergiebt:

$$2(x^2 + y^2 + c^2) + 2\sqrt{(x^2 + y^2 + c^2)^2 - 4c^2x^2} = 4a^2$$

und durch nochmaliges Quadrieren:

$$(x^2 + y^2 + c^2)^2 - 4c^2x^2 = ((x^2 + y^2 + c^2) - 2a^2)^2.$$

Durch Ausrechnen folgt:

$$x^2(a^2 - c^2) + y^2a^2 - a^2(a^2 - c^2) = 0.$$

Da $a > c$ ist, so kann man zur Abkürzung:

(2) $$a^2 - c^2 = b^2$$

setzen und erhält dann nach Division mit a^2b^2 die Gleichung:

(3) $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Dieser Gleichung genügen alle Punkte, für welche:

$$r + r' = 2a$$

ist, d. h. alle Punkte der Ellipse. Dafs aber auch nur diese Punkte die Gleichung (3) befriedigen, erkennt man so:

Verbindet man einen beliebigen Punkt Q der Ebene mit dem Anfangspunkte O, so mufs der Strahl OQ die Ellipse, da dieselbe eine geschlossene Kurve ist, in einem Punkte P schneiden.

Die Koordinaten von Q seien x_0, y_0, die von P mögen x, y heifsen. Dann ist $\frac{x^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$. Liegt nun Q näher bei

O wie P, so hat man $x_0 < x$, $y_0 < y$, folglich $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} < 1$. Liegt dagegen Q_0 auf der Verlängerung von P, d. h. ist $x_0 > x$, $y_0 > y$, so folgt: $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} > 1$. Gleichung (3) wird daher allemal aber auch nur dann erfüllt, wenn (x, y) einen Punkt der Ellipse bedeutet, also ist (3) als die Gleichung der Ellipse zu bezeichnen.

§ 40. Diskussion der Gleichung der Ellipse.

Sei (x, y) ein Punkt der Ellipse, also:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{1}$$

Da diese Gleichung nur die Quadrate von x und y enthält, so wird sie auch von den Koordinaten des Punktes $(-x, -y)$ befriedigt. Die Verbindungslinie von (x, y) und $(-x, -y)$ geht durch den Anfangspunkt und wird in ihm halbiert.

Um umgekehrt die Schnittpunkte einer beliebigen, durch O gehenden Geraden $y = \mu x$ mit der Ellipse zu bestimmen, hat man nur in (1) μx an die Stelle von y zu setzen und nach x aufzulösen. Man erhält die entgegengesetzt gleichen Abscissen $x = \pm \frac{ab}{\sqrt{b^2 + a^2\mu^2}}$ der beiden Schnittpunkte, deren Ordinaten demnach $y = \pm \frac{\mu ab}{\sqrt{b^2 + a^2\mu^2}}$ sind, d. h. die beiden Schnittpunkte sind symmetrisch zu O gelegen.

O heifst daher der Mittelpunkt der Ellipse, jede durch ihn hindurchgehende Sehne ein Durchmesser.

Die Ellipse liegt aber auch symmetrisch zu den Koordinatenachsen, denn wenn (x, y) ein Punkt der Ellipse ist, so liegen auch die Punkte $(-x, y)$ und $(x, -y)$ auf derselben. Die Ellipse wird also durch die Achsen in vier kongruente Quadranten geteilt.

Aus der nach y aufgelösten Gleichung der Ellipse:

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \tag{2}$$

erkennt man, dafs y nur für Werte von x zwischen $-a$ und $+a$ reelle Werte besitzt. Für $x = \pm a$ wird $y = 0$, für $x = 0$ folgt $y = \pm b$. Die Ellipse schneidet somit die x-Achse in zwei Punkten A, A', die Ordinatenachse in zwei Punkten B, B', deren Entfernungen resp. $AA' = 2a$, $BB' = 2b$ sind. AA' nennt man die grofse, BB' die kleine Achse, beide zusammen die Hauptachsen und ihre Endpunkte die Scheitel der Ellipse.

Für $x = c$ erhält man die beiden entgegengesetzt gleichen Ordinaten $y = \pm \frac{b^2}{a}$ des Brennpunktes F. Man bedient sich gewöhnlich der abkürzenden Bezeichnung:

$$\frac{b^2}{a} = p \tag{3}$$

und nennt p (die Ordinate des Brennpunktes F oder F') den Halbparameter der Ellipse.

Für $b = a$ folgt aus $a^2 - b^2 = c^2$, dafs $c = 0$ ist. Die Ellipse geht dann, wie aus (1) oder (2) folgt, in einen Kreis mit dem Radius a über. Der Kreis ist also ein spezieller Fall der Ellipse, die beiden Brennpunkte sind im Mittelpunkte vereinigt und die beiden Hauptachsen sind einander gleich.

Aufg. 1. Verbinde die Scheitel B, B' der kleinen Achse mit den Brennpunkten F, F' und beweise, dafs dadurch ein Rhombus entsteht, dessen Seiten gleich a sind.

Aufg. 2. Finde die Brennpunkte der Ellipse, deren Halbachsen $a = 5$, $b = 3$ sind.

Aufg. 3. Wie grofs ist die Exzentrizität c der Ellipse $\frac{x^2}{26} + \frac{y^2}{19} = 1$?

Aufg. 4. Wie heifst die Gleichung der Ellipse, deren kleine Halbachse $b = 3$ und deren Halbparameter $p = 1$ ist?

Aufg. 5. Bestimme die Schnittpunkte der Ellipse:

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$$

mit den Winkelhalbierenden der Achsen.

Aufg. 6. Bestimme die Endpunkte der durch $y = \mu x$ und $y = -\mu x$ dargestellten Durchmesser der Ellipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

und diskutiere das Resultat.

Aufg. 7. Untersuche, ob die Punkte $(1; -3)$; $(-4; 1)$; $(3; 2,4)$ innerhalb, auf oder aufserhalb der durch $a = 5$, $b = 3$ charakterisierten Ellipse liegen.

Aufg. 8. Bestimme die Halbachsen einer Ellipse, von welcher man die Brennpunkte und den Halbparameter kennt.

Aufg. 9. Berechne aus je zweien der vier Gröfsen a, b, c, p die beiden andern.

Aufg. 10. Löse dieselbe Aufgabe durch Konstruktion.

§ 41. Polargleichung der Ellipse bezogen auf den Mittelpunkt.

Ein beliebiger Punkt P der Ellipse:

$$(1) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

werde mit dem Mittelpunkte O durch den Halbmesser OP verbunden. Bezeichnet man OP mit r und den Winkel, den OP mit der positiven Richtung der x-Achse bildet (die Anomalie von P) mit u, so sind r, u die auf O bezogenen Polarkoordinaten von P, dessen rechtwinklige Koordinaten x, y sich demnach durch:

$$(2) \qquad x = r \cos u, \quad y = r \sin u$$

ausdrücken lassen. Führt man diese Werte in (1) ein, so kommt:

$$\frac{r^2 \cos^2 u}{a^2} + \frac{r^2 \sin^2 u}{b^2} = 1$$

oder:

$$(3) \qquad \frac{1}{r^2} = \frac{\cos^2 u}{a^2} + \frac{\sin^2 u}{b^2}.$$

Dies ist die auf den Mittelpunkt bezogene Polargleichung der Ellipse. Sie läfst sich auch in der Form schreiben:

$$(4) \qquad r^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 \sin^2 u + b^2 \cos^2 u}.$$

Berücksichtigt man $\sin^2 u = 1 - \cos^2 u$ und ferner $a^2 - b^2 = c^2$, so erhält man hieraus:

$$(5) \qquad r^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 - c^2 \cos^2 u}.$$

Man bedient sich der Bezeichnung:

(6) $$\frac{c}{a} = \varepsilon, \quad (\varepsilon < 1)$$

und nennt ε die numerische Exzentrizität, während c, im Gegensatze hierzu, auch die lineare Exzentrizität genannt wird. Mit Hülfe dieser neuen Bezeichnung geht (5) über in:

(7) $$r^2 = \frac{b^2}{1 - \varepsilon^2 \cos^2 u}.$$

Aus (5) erkennt man, dafs r für $u = 0$ seinen gröfsten Wert, nämlich a erhält, dafs r stetig abnimmt, wenn u den ersten Quadranten durchläuft und dafs für $u = 90^0$ r den kleinsten Wert, nämlich b erreicht.

Daraus ergiebt sich, dafs der um den Mittelpunkt O mit dem Radius a beschriebene Kreis, welcher die Ellipse in den Scheiteln A und A' der grofsen Achse berührt, der Ellipse umschrieben ist, während der konzentrische Kreis mit dem Radius b, welcher die Ellipse in den Scheiteln B und B' der kleinen Achse berührt, der Ellipse eingeschrieben ist.

Gleichung (3) führt noch zu einem bemerkenswerten Satze. Konstruiert man nämlich zu $OP = r$ den senkrechten Halbmesser $OP' = r'$, dessen Anomalie $u' = 90^0 + u$ ist, so hat man zunächst:

(8) $$\frac{1}{r'^2} = \frac{\cos^2 u'}{a^2} + \frac{\sin^2 u'}{b^2}.$$

Da aber $\cos u' = -\sin u$, $\sin u' = \cos u$ ist, so erhält man durch Addition von (3) und (8):

(9) $$\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r'^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2},$$

d. h.: Die Summe der reciproken Quadrate zweier auf einander senkrecht stehender Halbmesser ist konstant.

Aufg. 1. Bestimme die Länge der beiden Halbmesser, welche die Winkel der Achsen der Ellipse $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{3} = 1$ halbieren.

Aufg. 2. Bestimme für dieselbe Ellipse die Länge des zu der Geraden $7x - 2y = 3$ parallelen Halbmessers. (Man hat $\sin u$ und $\cos u$ aus dem gegebenen $\operatorname{tg} u$ zu berechnen.)

Aufg. 3. Bestimme für dieselbe Ellipse die Summe der reciproken Quadrate der zu den Geraden $7x + 4y - 1 = 0$ und $4x - 7y + 3 = 0$ parallelen Halbmesser und verifiziere Gleichung (9).

Aufg. 4. Berechne für dieselbe Ellipse die numerische Exzentrizität und gieb die Polargleichung der Ellipse in den verschiedenen Formen an.

Aufg. 5. Beweise aus Gleichung (3), dafs der Anfangspunkt jede durch ihn gehende Gerade halbiert, also der Mittelpunkt der Ellipse ist.

Aufg. 6. Beweise aus Gleichung (3), dafs zu den Achsen symmetrische Durchmesser einander gleich sind.

Aufg. 7. Es seien zwei Ellipsen $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ und $\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1$ gegeben, welche dieselbe numerische Exzentrizität ε besitzen. Beweise, dafs nicht nur $a : a_1 = b : b_1$ ist, sondern dafs auch für je zwei Halbstrahlen r und r_1, die zu derselben Anomalie u gehören, $r : r_1 = a : a_1$ ist. Die beiden Ellipsen sind ähnlich und ähnlich gelegen. Die Gleichheit der Exzentrizität zweier Ellipsen ist die notwendige und hinreichende Bedingung für ihre Ähnlichkeit.

Aufg. 8. Beweise die Gleichungen:

$$a = \frac{p}{1 - \varepsilon^2}, \quad b = \frac{p}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}},$$

insofern p den Halbparameter bedeutet.

Aufg. 9. Drücke b, c, p durch a und ε aus.

Aufg. 10. Für die Bahn des Merkur ist $\varepsilon = 0,2$. Konstruiere eine Ellipse, welche der Merkurbahn ähnlich ist (Aufg. 7).

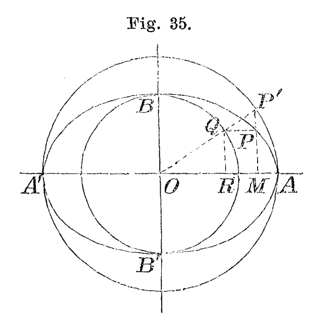
Aufg. 11. Die Entfernung der Erde von der Sonne in Sonnennähe verhält sich zu derjenigen in Sonnenferne wie $29 : 30$. Berechne daraus das ε der Erdbahn.

Aufg. 12. Welchen Wert hat ε, wenn $c = b$ ist?

Aufg. 13. Welchen Wert hat ε für den Kreis?

§ 42. Konstruktion der Ellipse mittels des eingeschriebenen und des umschriebenen Kreises.

Fig. 35.



Konstruiert man zu der Ellipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

oder:

(1) $$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

den eingeschriebenen und den umschriebenen Kreis, so lautet die Gleichung des letzteren:

(2) $$y = \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Bezeichnet man die zu derselben Abscisse $OM = x$ gehörigen Ordinaten MP' und MP des umschriebenen Kreises und der Ellipse resp. mit y' und y, so folgt aus (1) und (2):

(3) $$y' : y = a : b\,, \quad \text{d. h.:}$$

Man erhält die Ellipse mit den Halbachsen a und b, indem man die Ordinaten des mit dem Radius a beschriebenen Kreises in dem konstanten Verhältnis $a : b$ verkürzt.

Um diese Konstruktion auszuführen, zeichne man die beiden konzentrischen Kreise mit den Radien a und b und ziehe durch den Mittelpunkt einen beliebigen Strahl OQP'. Zieht man dann durch den Schnittpunkt Q dieses Strahles mit dem kleineren Kreise eine Parallele zur x-Achse und durch den Schnittpunkt P' des Strahles mit dem gröſseren Kreise eine Parallele zur y-Achse, so ist der Schnittpunkt P der beiden Parallelen ein Punkt der Ellipse, denn man hat:

$$MP' : MP = MP' : QR = OP' : OQ\,,$$

d. h.:

$$y' : y = a : b.$$

Aufg. Zeichne die Ellipse mit den Halbachsen $a = 5$, $b = 3$.

§ 43. Konjugierte Durchmesser.

Im vorhergehenden Paragraphen haben wir eine merkwürdige Verwandtschaft kennen gelernt, welche zwischen einer

Ellipse und dem ihr umschriebenen Kreise besteht. (Ganz analoge Beziehungen bestehen natürlich auch zwischen der Ellipse und dem eingeschriebenen Kreise.) Um diese Verwandtschaft noch eingehender zu studieren, gehen wir von folgender Definition aus:

Zwei Punkte P und P' mit den rechtwinkligen Koordinaten (x, y) und x', y' sollen entsprechende Punkte heifsen, wenn:

$$(1) \qquad x = x' \quad \text{und} \quad y : y' = b : a$$

ist. In diesem Sinne sind also je zwei zu derselben Abscisse gehörigen Punkte der Ellipse und des umschriebenen Kreises (§ 42) entsprechende Punkte.

Da man zu einem Punkte P' den entsprechenden Punkt P findet, indem man die Abscisse von P' ungeändert läfst, dagegen seine Ordinate mit $\frac{b}{a}$ multipliziert, so erhält man zu den Punkten P' der Geraden:

$$(2) \qquad y = \mu x + n$$

die entsprechenden Punkte P durch die Gleichung:

$$(3) \qquad y = \frac{b}{a}(\mu x + n),$$

d. h. die Punkte P liegen ebenfalls auf einer Geraden. Wir nennen die durch (2) und (3) definierten Geraden entsprechende Geraden und bezeichnen sie mit f' und f. Aus den Gleichungen von f und f' folgt, dafs zwei entsprechende Geraden sich in einem Punkte der x-Achse treffen, wie sich auch nach der Definition entsprechender Punkte von selbst versteht. Zugleich zeigt eine einfache Betrachtung, dafs dem Mittelpunkte M' eines beliebigen Stückes $P'Q'$ von f' wieder der Mittelpunkt M des entsprechenden Stückes PQ von f entspricht. Sind ferner f' und f_1' zwei parallele Geraden mit dem Richtungskoeffizienten μ, so haben die entsprechenden Geraden f und f_1 den gemeinschaftlichen Richtungskoeffizienten $\frac{b}{a}\mu$, sind also ebenfalls einander parallel.

Nunmehr wollen wir alle diese Beziehungen anwenden auf die Ellipse:

(4) $$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

und den umschriebenen Kreis:

(5) $$y = \sqrt{a^2 - x^2},$$

deren zu derselben Abscisse gehörigen Punkte in dem oben angegebenen Sinne entsprechende Punkte sind.

Die Gerade f' schneide den Kreis in zwei Punkten P', Q'. Die entsprechenden Punkte P, Q liegen dann erstens auf der Ellipse und zweitens auf der Geraden f, sind also die Schnittpunkte von f mit der Ellipse. Der Mittelpunkt M' der Kreissehne $P'Q'$ und der Mittelpunkt M der Ellipsensehne PQ sind dann entsprechende Punkte. Verschieben wir nun die Gerade f' parallel zu ihrer ursprünglichen Lage, indem wir bei konstantem μ das n variieren, so rückt auch die entsprechende Gerade f mit dem Richtungskoeffizienten $\frac{b}{a}\mu$ parallel zu sich selbst fort.

Der Mittelpunkt M' der Kreissehne $P'Q'$ durchläuft bei dieser Verschiebung den zu f' normalen Durchmesser g', dessen Gleichung:

(6) $$y = -\frac{1}{\mu} x$$

ist. Folglich durchläuft der Mittelpunkt M der Ellipsensehne eine Gerade g mit der Gleichung:

(7) $$y = -\frac{b}{a} \frac{1}{\mu} x,$$

d. h. auch einen Durchmesser. Es gilt daher der Satz:

I. Die Mittelpunkte paralleler Sehnen einer Ellipse liegen auf einem Durchmesser.

Bezeichnet man die Winkel, welche die Geraden f und g mit der positiven Richtung der x-Achse einschliefsen, mit α und β, so folgt aus (3) und (7):

(8) $$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a} \mu, \quad \operatorname{tg} \beta = -\frac{b}{a} \frac{1}{\mu},$$

folglich:

(9) $$\operatorname{tg} \alpha \,.\, \operatorname{tg} \beta = -\frac{b^2}{a^2}$$

oder:

(10) $$\frac{\cos \alpha \cos \beta}{a^2} + \frac{\sin \alpha \sin \beta}{b^2} = 0.$$

Die Symmetrie dieser Gleichungen in Bezug auf α und β lehrt, dafs wenn f mit der x-Achse den Winkel β einschliefsen würde, der zugehörige Durchmesser g notwendig mit der x-Achse den Winkel α bilden müfste. Konstruieren wir daher den zu f parallelen Durchmesser h, so halbiert von den beiden Durchmessern g und h jeder die Sehnen, die dem andern parallel sind. Zwei solche Durchmesser heifsen konjugierte Durchmesser.

Von zwei konjugierten Durchmessern kann man einen stets willkürlich wählen, den andern findet man dann in eindeutiger Weise entweder analytisch durch Gleichung (9), oder geometrisch, indem man den Mittelpunkt einer beliebigen zu dem gegebenen Durchmesser parallelen Sehne mit dem Mittelpunkte der Ellipse verbindet.

Da zwei konjugierte Durchmesser der Ellipse die entsprechenden Geraden zu zwei auf einander senkrechten Durchmessern des umschriebenen Kreises sind (wie aus der ganzen Herleitung, besonders deutlich aber aus den Gleichungen (8) zu ersehen ist, indem die entsprechenden Richtungskoeffizienten zu $\operatorname{tg}\alpha$ und $\operatorname{tg}\beta$ resp. μ und $-\frac{1}{\mu}$ sind), so kann man zu einem Durchmesser der Ellipse den konjugierten auch mittels des umschriebenen Kreises finden, nämlich so: In dem Endpunkte P des Durchmessers suche man den entsprechenden Punkt P' des Kreises, zeichne den zu OP' normalen Radius OQ' und verbinde den zu Q' entsprechenden Punkt Q mit O.

Da $\operatorname{tg}\alpha . \operatorname{tg}\beta$ stets negativ ist, so mufs von den Winkeln α und β der eine ein spitzer, der andere ein stumpfer Winkel sein, d. h.:

II. Konjugierte Durchmesser werden durch die Achsen getrennt.

Sei α der spitze, β der stumpfe Winkel, so folgt:

$$\operatorname{tg}(\beta - \alpha) = \frac{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}\alpha \, . \, \operatorname{tg}\beta} = \frac{-\frac{b}{a}\frac{1}{\mu} - \frac{b}{a}\mu}{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$

oder:

$$(11) \qquad \operatorname{tg}(\beta - \alpha) = -\frac{1 + \mu^2}{\mu}\,\frac{ab}{c^2}.$$

Da α spitz ist, mufs μ positiv sein. Es ist daher $\operatorname{tg}(\beta - \alpha)$ negativ, d. h. $\beta - \alpha$ ist ein stumpfer Winkel. Von den beiden Winkeln, welche zwei konjugierte Durchmesser einschliefsen, wird daher der stumpfe stets von der kleinen Achse, der spitze von der grofsen Achse durchschnitten.

Aus Gleichung (9) folgt, dafs $\beta = 90^0$ sein mufs, wenn $\alpha = 0$ wird, d. h.:

III. Die Hauptachsen sind konjugierte Durchmesser und zwar die einzigen, die auf einander senkrecht stehen.

Ist nämlich α von Null verschieden, so kann wegen (9) $\operatorname{tg}\alpha \,.\, \operatorname{tg}\beta$ nicht gleich -1 sein. Nur wenn $a = b$, d. h. wenn die Ellipse ein Kreis ist, besteht die Gleichung $\operatorname{tg}\alpha \,.\, \operatorname{tg}\beta = -1$ für alle Paare konjugierter Durchmesser. Wenn also eine Ellipse zwei Paare auf einander senkrecht stehender konjugierter Durchmesser besitzt, so ist sie ein Kreis und dann stehen je zwei konjugierte Durchmesser auf einander senkrecht.

Satz III führt zu einer einfachen Konstruktion der Achsen einer Ellipse, die gezeichnet vorliegt. Man beschreibe über einem (aus Satz I zu konstruierenden) Durchmesser einen Halbkreis, verbinde den Schnittpunkt, den dieser mit der Ellipse bildet, mit den Endpunkten des Durchmessers und ziehe zu diesen Sehnen durch den Mittelpunkt Parallelen. Da diese jene Sehnen halbieren und überdies auf einander senkrecht stehen, so sind sie die Achsen.

Aufg. 1. In den einer Ellipse umschriebenen Kreis zeichne man in symmetrischer Lage zu den Achsen ein reguläres Achteck und dazu die entsprechende Figur der Ellipse.

Aufg. 2. Welches Paar konjugierter Durchmesser liegt symmetrisch zu den Achsen? (Man benutze die entsprechenden Durchmesser des Kreises oder Gleichung (9) und berücksichtige § 41, Aufg. 6.)

Aufg. 3. Man bestimme den Richtungskoeffizienten desjenigen Durchmessers, dessen konjugierter unter 45^0 geneigt ist, und konstruiere auch den Durchmesser mit Hilfe des Kreises.

Aufg. 4. Ein Durchmesser drehe sich von $\alpha = 0$ bis $\alpha = 90^0$; wie bewegt sich der konjugierte? Beweise,

dafs die Paare konjugierter Durchmesser sich gegenseitig trennen.

Aufg. 5. Man konstruiere die Schnittpunkte einer Geraden mit einer Ellipse, von der nur die Hauptachsen gegeben sind, ohne die Ellipse selbst zu zeichnen, mit Hilfe der Sätze von den entsprechenden Punkten.

Aufg. 6. Es sei (x_1, y_1) ein Punkt der Ellipse, folglich $xy_1 - yx_1 = 0$ die Gleichung des zugehörigen Durchmessers. Beweise mit Hilfe von Gleichung (9), dafs der konjugierte Durchmesser die Gleichung $\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 0$ besitzt. Bestimme hieraus die Koordinaten seiner Endpunkte.

Aufg. 7. Beweise mit Hilfe des umschriebenen Kreises, dafs jede Gerade die Ellipse in zwei Punkten schneidet, die reell und verschieden, reell und zusammenfallend, oder imaginär sein können.

§ 44. Die Gleichung der Ellipse, bezogen auf zwei konjugierte Durchmesser als schiefwinklige Koordinatenachsen.

Die auf die Hauptachsen bezogene Gleichung der Ellipse sei:

(1) $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

a und b seien also die Halbachsen.

Zwei konjugierte Durchmesser mögen nun mit der positiven x-Achse die Winkel α und β einschliefsen, so ist (§ 43, (10)):

(2) $$\frac{\cos\alpha \cos\beta}{a^2} + \frac{\sin\alpha \sin\beta}{b^2} = 0.$$

Sind die beiden zu α und β gehörigen Durchmesser resp. gleich $2a'$ und $2b'$, so bestehen zwischen a' und α einerseits, b' und β andrerseits die Relationen (§ 41):

(3) $$\frac{\cos^2\alpha}{a^2} + \frac{\sin^2\alpha}{b^2} = \frac{1}{a'^2},$$

(4) $$\frac{\cos^2\beta}{a^2} + \frac{\sin^2\beta}{b^2} = \frac{1}{b'^2}.$$

Wählt man jetzt die beiden durch α und β bestimmten Durchmesser als x'-Achse resp. y'-Achse eines neuen schiefwinkligen Koordinatensystems, so gelten die Transformationsformeln (§ 15):

$$(5) \qquad \begin{aligned} x &= x' \cos\alpha + y' \cos\beta, \\ y &= x' \sin\alpha + y' \sin\beta. \end{aligned}$$

Führt man aber diese Werte von x und y in (1) ein und berücksichtigt (2), (3) und (4), so ergiebt sich (vergleiche auch Aufg. 3, § 15):

$$(6) \qquad \frac{x'^2}{a'^2} + \frac{y'^2}{b'^2} = 1$$

als Gleichung der Ellipse, bezogen auf die konjugierten Durchmesser $2a'$ und $2b'$.

Diese Gleichung setzt die im vorhergehenden Paragraphen besprochene (schiefe) Symmetrie der Ellipse in Bezug auf zwei konjugierte Durchmesser in Evidenz. Sie ist genau von derselben Form, wie die auf die Hauptachsen bezogene Ellipsengleichung, welche sie als speziellen Fall enthält.

Aufg. 1. Man suche die Gleichung der Ellipse mit den Halbachsen a und b, bezogen auf die beiden zu den Achsen symmetrischen konjugierten Durchmesser. Man findet:

$$x'^2 + y'^2 = a'^2,$$

wo a' noch zu bestimmen ist.

Aufg. 2. Man transformiere auf die beiden konjugierten Durchmesser, von denen der eine unter 45^0 gegen die Hauptachse geneigt ist.

§ 45. Die Tangente in einem Punkte der Ellipse.

Entsprechend der allgemeinen, § 34 gegebenen Definition der Tangente einer Kurve in einem Punkte P_1 betrachten wir die Tangente der Ellipse in einem Punkte P_1 als die Grenzlage, welcher sich die Sekante P_1P_2 nähert, wenn der zweite Schnittpunkt P_2 mit P_1 zusammenfällt.

Sei jetzt die auf die beiden konjugierten Durchmesser $2a'$ und $2b'$ als x- und y-Achsen bezogene Gleichung der Ellipse:

$$(1) \qquad \frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} = 1.$$

Zwei beliebige Punkte P_1 und P_2 der Ellipse mögen die Koordinaten x_1, y_1 und x_2, y_2 haben, dann lautet die Gleichung der Sekante P_1P_2:

(2) $$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

Da aber:

$$\frac{x_1^2}{a'^2} + \frac{y_1^2}{b'^2} = 1, \quad \frac{x_2^2}{a'^2} + \frac{y_2^2}{b'^2} = 1$$

ist, so folgt:

$$\frac{x_2^2 - x_1^2}{a'^2} + \frac{y_2^2 - y_1^2}{b'^2} = 0$$

oder:

(3) $$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -\frac{b'^2}{a'^2}\,\frac{x_2 + x_1}{y_2 + y_1},$$

so dafs wir die Gleichung der Sekante $P_1 P_2$ in der Form schreiben können:

$$y - y_1 = -\frac{b'^2}{a'^2}\,\frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2}(x - x_1).$$

Lassen wir nun P_2 mit P_1 zusammenfallen und setzen demnach $x_2 = x_1$, $y_2 = y_1$, so erhalten wir als Gleichung der Tangente im Punkte P_1:

(4) $$y - y_1 = -\frac{b'^2 x_1}{a'^2 y_1}(x - x_1).$$

Eine einfache Umformung führt zu:

$$\frac{x x_1}{a'^2} + \frac{y y_1}{b'^2} = \frac{x_1^2}{a'^2} + \frac{y_1^2}{b'^2}.$$

Da aber P_1 auf der Ellipse liegt, ist die rechte Seite gleich 1, sodafs die Gleichung der Tangente die Form annimmt:

(5) $$\frac{x x_1}{a'^2} + \frac{y y_1}{b'^2} = 1.$$

Aufg. 1. Bezieht man die Gleichung der Ellipse auf die Halbachsen a und b, so lautet die Gleichung der Tangente in (x_1, y_1): $\frac{x x_1}{a^2} + \frac{y y_1}{b^2} = 1$. Man leite diese Gleichung dadurch ab, dafs man für den entsprechenden Kreispunkt (x_1', y_1') die Gleichung der Tangente $x' x_1' + y' y_1' = a^2$ aufstellt und zu dieser die entsprechende Gerade aufsucht, welche dann die Tangente in (x_1, y_1) ist. (Man hat $x' = x$, $x_1' = x_1$, $y' = \frac{a}{b} y$, $y_1' = \frac{a}{b} y_1$ zu setzen.)

Aufg. 2. Bringe die auf die Achsen bezogene Tangentengleichung auf die Normalform.

Aufg. 3. Bestimme die Achsenabschnitte der Tangente $\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1$.

Aufg. 4. Konstruiere die Tangente im Punkte (x_1, y_1) mit Hülfe der Bemerkung, dafs die Tangente in dem entsprechenden Kreispunkte (x_1', y_1') denselben Abschnitt auf der grofsen Achse bestimmt, wie die Ellipsentangente.

Aufg. 5. Man suche den Berührungspunkt und die Gleichung derjenigen Tangente der Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, welche der Verbindungslinie der beiden Scheitel A und B (§ 40) parallel ist.

Aufg. 6. Unter welcher Bedingung berührt die Gerade $Ax + By + C = 0$ die Ellipse $\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} = 1$? (Eine Vergleichung mit $\frac{xx_1}{a'^2} + \frac{yy_1}{b'^2} = 1$ führt zu $x_1 = - a'^2 \frac{A}{C}$, $y_1 = - b'^2 \frac{B}{C}$. Setzt man diese Werte in die Ellipsengleichung ein, so erhält man die gewünschte Bedingung in der Form $a'^2 A^2 + b'^2 B^2 = C^2$.)

Aufg. 7. Beweise aus Aufg. 6, dafs zu jeder Richtung zwei parallele Tangenten gehören, deren Berührungspunkte die Endpunkte desselben Durchmessers sind.

§ 46. Tangenten und Durchmesser.

Setzt man in der auf die beiden konjugierten Durchmesser $2a'$ und $2b'$ bezogenen Tangentengleichung:

$$\frac{xx_1}{a'^2} + \frac{yy_1}{b'^2} = 1$$

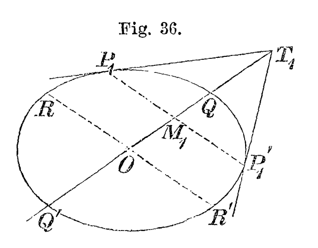
das eine Mal $y_1 = 0$, $x_1 = a'$, das andre Mal $y_1 = 0$, $x_1 = -a'$, so erhält man die Gleichungen der beiden Tangenten in den Endpunkten des Durchmessers $2a'$, nämlich $x = a'$ und $x = -a'$. Dies sind aber die Gleichungen zweier Parallelen zur y-Achse, d. h. zum konjugierten Durchmesser $2b'$. Es folgt daher (vergl. § 45, Aufg. 7):

I. Die Tangenten in den Endpunkten eines Durchmessers sind dem konjugierten Durchmesser und folglich auch einander parallel.

Man kann diesen Satz auch so ableiten, daſs man eine Sehne parallel zu sich so lange verschiebt, bis ihre Schnittpunkte zusammengefallen sind und die Sehne zur Tangente geworden ist. Der zu dem Berührungspunkte gehörige Durchmesser ist dann als Ort der Mittelpunkte der parallelen Sehnen zu der Richtung derselben konjugiert.

Bestimmt man für die beiden zur x-Achse, d. h. zum Durchmesser $2a'$ symmetrisch gelegenen Punkte (x_1, y_1) und $(x_1, -y_1)$ die Tangenten und berechnet, indem man $y = 0$ setzt, für beide den Abschnitt auf der x-Achse, so findet man beide Male denselben Abschnitt $OT_1 = \frac{a'^2}{x_1}$, d. h.:

Fig. 36.



II. Zwei beliebige Tangenten der Ellipse treffen sich stets in einem Punkte desjenigen Durchmessers, welcher die Verbindungslinie ihrer Berührungspunkte halbiert.

Schreibt man die Gleichung $OT_1 = \frac{a'^2}{x_1}$ in der Form $OT_1 . OM_1 = a'^2 = OQ^2 = OQ'^2$, so erkennt man, daſs Q, Q', M_1, T_1 harmonische Punkte sind.

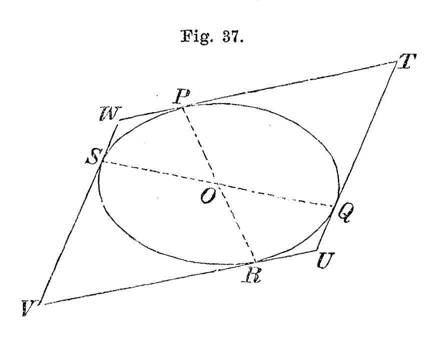
Zwei Sehnen, welche einen beliebigen Punkt der Ellipse mit den Endpunkten eines Durchmessers verbinden, heiſsen Supplementarsehnen. Zieht man zu zwei Supplementarsehnen parallele Durchmesser, so werden jene von diesen halbiert, von den beiden Durchmessern halbiert also jeder eine Sehne, die dem andern parallel ist, d. h.:

III. Die zu irgend einem Paare Supplementarsehnen parallelen Durchmesser sind konjugiert.

Denken wir einer Ellipse ein ganz beliebiges Parallelogramm umschrieben, indem wir in den Endpunkten zweier (nicht notwendig konjugierter) Durchmesser PR und QS die Tangenten konstruieren, so bilden die Berührungspunkte P, Q, R, S ein der Ellipse eingeschriebenes Parallelogramm. Zieht man nun die zu den Seiten dieses Parallelogramms parallelen Durchmesser, so sind diese nach Satz III konjugiert

und halbieren die Seiten des eingeschriebenen Parallelogramms. Infolge von Satz II gehen dann aber diese Durchmesser durch die Ecken T, U, V, W des umschriebenen Parallelogramms, d. h. sie sind die Diagonalen desselben. Es gilt daher der Satz:

Fig. 37.



IV. Die Diagonalen eines jeden der Ellipse umschriebenen Parallelogramms sind konjugierte Durchmesser.

Wir wollen endlich noch die Gleichung der Ellipse ableiten, wenn zur x-Achse ein beliebiger Durchmesser $2a'$ und zur y-Achse die in dem einen Endpunkte von $2a'$ konstruierte Tangente gewählt wird, welche dann nach I dem konjugierten Durchmesser $2b'$ parallel ist. Die auf $2a'$ und $2b'$ bezogene Ellipsengleichung lautet:

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} = 1. \tag{1}$$

Um auf die neuen Achsen zu transformieren, hat man y ungeändert zu lassen und x durch $x - a'$ zu ersetzen (§ 6), indem wir der Einfachheit halber auch für die neuen Koordinaten die Bezeichnungen x, y (statt x', y') wählen.

Man erhält dann:

$$\frac{(x-a')^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} = 1$$

oder:

$$y^2 = 2\frac{b'^2}{a'}x - \frac{b'^2}{a'^2}x^2. \tag{2}$$

Für den Fall rechtwinkliger Koordinaten haben wir $a' = a$, $b' = b$, $\frac{b^2}{a} = p$, wo p den Halbparameter bedeutet, und es geht dann (2) über in:

$$y^2 = 2px - \frac{p}{a}x^2. \tag{3}$$

Wählt man die beiden symmetrisch zu den Hauptachsen gelegenen konjugierten Durchmesser als Koordinatenachsen

(§ 44, Aufg. 1), so ist $a' = b'$ und die Gleichungen (1) und (2) nehmen dann die Form an:

(4) $$x^2 + y^2 = a'^2$$

und

(5) $$y^2 = 2a'x - x^2.$$

Diese Gleichungen stimmen genau mit der Mittelpunktsgleichung resp. Scheitelgleichung des Kreises überein (§ 31, Gl. (6) und (3)). Während sie aber bei dem Kreise für unzählig viele rechtwinklige Koordinatensysteme gelten, finden sie bei der Ellipse nur für ein einziges und zwar schiefwinkliges Achsensystem Anwendung.

§ 47. Die excentrische Anomalie.

Schreiben wir die auf die Hauptachsen bezogene Ellipsengleichung in der Form:

(1) $$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1,$$

so erkennen wir, dafs die echten Brüche $\frac{x}{a}$ und $\frac{y}{b}$ als Cosinus resp. Sinus desselben Winkels v angesehen werden können.

Setzen wir nämlich:

(2) $$x = a \cos v, \quad y = b \sin v,$$

so erhalten wir aus diesen Gleichungen für jeden Wert von v ein Zahlenpaar x, y, welches der Gleichung (1) genügt, denn es ist allemal:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = \cos^2 v + \sin^2 v = 1.$$

Umgekehrt erhält man für jedes Zahlenpaar x, y, welches der Gleichung (1) genügt und nur für solche aus den Gleichungen (2) einen ganz bestimmten Wert von v. Da also Gleichung (1) und die Gleichungen (2) genau dieselben Zahlenpaare x, y definieren, so sagen wir, die beiden Gleichungen (2) seien der einen Gleichung (1) äquivalent. Man nennt den variabeln Parameter v, mit Hülfe dessen man sämtliche Punkte der Ellipse darstellen kann, die excentrische Anomalie des Punktes (x, y). Da ein Punkt der Ellipse vollständig durch

seine excentrische Anomalie bestimmt ist, so können wir den Punkt (x, y) der Ellipse auch kurz den Punkt (v) nennen.

Aus der Figur des § 42 ergiebt sich aber auch sofort die geometrische Bedeutung von v. Trifft nämlich ein beliebiger durch den Mittelpunkt der Ellipse gezogener Strahl den eingeschriebenen Kreis in Q, den umschriebenen Kreis in P', so hat der zugehörige Ellipsenpunkt (man vergl. die a. a. O. beschriebene Konstruktion) dieselbe Abscisse wie P' und dieselbe Ordinate wie Q. Da aber anderseits die Koordinaten von P resp. $a \cos v$ und $b \sin v$ sind, so folgt, dafs v gleich dem Winkel ist, welchen der Strahl OQP' mit der positiven Richtung der x-Achse bildet, d. h.:

Die excentrische Anomalie eines Ellipsenpunktes ist die Anomalie des entsprechenden Punktes des umschriebenen Kreises.

Aufg. 1. Bestimme die excentrische Anomalie des Punktes $(3; -1,6)$, der Ellipse $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$.

Aufg. 2. Durch welche Gleichungen wird die excentrische Anomalie eines Punktes der Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ definiert, welcher senkrecht über einem Brennpunkte liegt?

Aufg. 3. Bestimme die Koordinaten des Punktes $v = 45^0$.

Aufg. 4. In welcher Beziehung stehen die excentrischen Anomalien der Endpunkte eines Durchmessers?

§ 48. Weitere Sätze über konjugierte Durchmesser.

Sei P ein beliebiger Punkt der Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Bezeichnet man mit v seine excentrische Anomalie, mit x, y seine rechtwinkligen Koordinaten und mit a' den zugehörigen Halbmesser OP, so hat man:

$$x = a \cos v, \quad y = b \sin v,$$
$$a'^2 = x^2 + y^2,$$

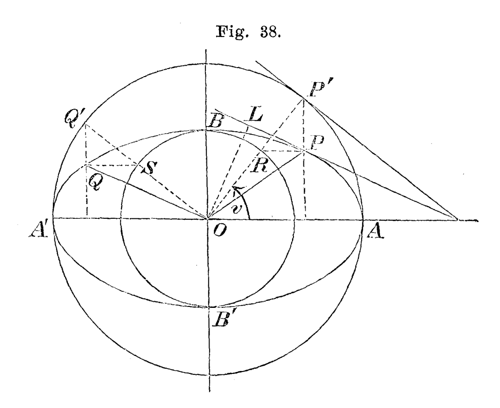
folglich:

$$(1) \qquad a'^2 = a^2 \cos^2 v + b^2 \sin^2 v.$$

Aus der § 43 gegebenen Konstruktion des zu OP konjugierten Halbmessers OQ, welche auch die nachstehende Figur

zur Darstellung bringt, folgt, daſs der Endpunkt Q die excentrische Anomalie $v + 90^0$ besitzt und somit seine Koordinaten

Fig. 38.



resp. $-a \sin v$ und $b \cos v$ sind. Setzt man nun $OQ = b'$, so folgt:

$$(2) \qquad b'^2 = a^2 \sin^2 v + b^2 \cos^2 v.$$

Addieren wir (1) und (2), so erhalten wir:

$$(3) \qquad a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2,$$

d. h.: I. Die Summe der Quadrate zweier konjugierter Halbmesser ist konstant und zwar gleich der Summe der Quadrate der Halbachsen.

Um den Inhalt des von den beiden konjugierten Halbmessern OP und OQ gebildeten Dreiecks OPQ zu berechnen, haben wir nur die Koordinaten $a \cos v$, $b \sin v$, resp. $-a \sin v$, $b \cos v$ der Punkte P und Q in die Formel:

$$J = \tfrac{1}{2}(x_1 y_2 - x_2 y_1)$$

einzusetzen und erhalten:

$$(4) \qquad J = \tfrac{1}{2} ab,$$

in Worten:

II. Das durch die Verbindung der Endpunkte zweier konjugierter Halbmesser entstehende Dreieck hat einen konstanten Inhalt.

Da der Inhalt des Dreiecks OPQ aber auch durch $\frac{1}{2} a'b' \sin \omega$ ausgedrückt werden kann, insofern ω den von den

beiden konjugierten Durchmessern eingeschlossenen spitzen Winkel bedeutet, so erhalten wir aus:

$$\tfrac{1}{2}\,ab = \tfrac{1}{2}\,a'b'\sin\omega$$

die Relation:

(5) $$\sin\omega = \frac{ab}{a'b'},$$

durch welche man den von den beiden konjugierten Durchmessern $2a'$ und $2b'$ eingeschlossenen spitzen Winkel, den sogenannten Konjugationswinkel, berechnen kann.

Der Konjugationswinkel wird seinen kleinsten Wert erhalten, wenn das Produkt $a'b'$ seinen gröfsten Wert annimmt. Nun ist:

$$2a'b' = a'^2 + b'^2 - (a' - b')^2 = a^2 + b^2 - (a' - b')^2,$$

woraus man erkennt, dafs für $a' = b'$ das Produkt $a'b'$ ein Maximum wird. Dieser Fall tritt ein, wenn die Anomalie von a' gleich 45^0 wird; dann folgt aber aus (1) und (2) (oder auch aus Satz I):

(6) $$a'^2 = b'^2 = \frac{a^2 + b^2}{2}.$$

Der Neigungswinkel α von a' wird dann durch $\operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{a}$ bestimmt (§ 43, Aufg. 2 und § 44, Aufg. 1), insofern wir, wie dies in der Figur geschehen ist, α als den spitzen und den Neigungswinkel β von b' als den stumpfen Winkel voraussetzen.

Wir sehen also:

III. Unter allen Paaren konjugierter Durchmesser schliefst das Paar der gleichen, zu den Hauptachsen symmetrisch gelegenen konjugierten Durchmesser den kleinsten Konjugationswinkel ein.

Bezeichnen wir mit δ den Abstand OL des Mittelpunktes O von der Tangente in P, die ja zu OQ parallel ist, so ist δ zugleich der Abstand des Punktes P von OQ und demnach das Dreieck OPQ auch gleich $\frac{1}{2}\,b'p$. Durch Vergleichen mit $\frac{1}{2}\,ab$ ergiebt sich dann aber:

(7) $$\delta = \frac{ab}{b'}.$$

Diese Gleichung können wir auch direkt ableiten. Setzt man nämlich in die Gleichung $\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1$ einer Ellipsentangente

für die Koordinaten des Berührungspunktes (x_1, y_1) die Koordinaten von P, nämlich $a \cos v$, $b \sin v$ ein, so erhält man die Gleichung der Tangente in P in der Form:

(8) $$\frac{x \cos v}{a} + \frac{y \sin v}{b} = 1.$$

Aus dieser Gleichung findet man den Abstand δ der Tangente vom Anfangspunkte (§ 22), nämlich:

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\frac{\cos^2 v}{a^2} + \frac{\sin^2 v}{b^2}}} = \frac{ab}{\sqrt{a^2 \sin^2 v + b^2 \cos^2 v}}.$$

Der Nenner ist aber zufolge Gleichung (2) gleich b'.

Wir wollen endlich noch den Abstand δ des Anfangspunktes von einer Ellipsentangente mit Hülfe der Richtung derselben ausdrücken.

Soll eine beliebige Gerade $x \cos \alpha + y \sin \alpha - \delta = 0$, deren Richtung durch α charakterisiert ist (§ 22), die Ellipse berühren und hat der Berührungspunkt die excentrische Anomalie v, so mufs sich die Gleichung der gegebenen Geraden auf die Form (8), d. h. auf die Form:

$$\frac{x \cos v}{a} + \frac{y \sin v}{b} = 1$$

bringen lassen.

Durch Vergleichen ergiebt sich:

(9) $$\cos v = \frac{a \cos \alpha}{\delta}, \quad \sin v = \frac{b \sin \alpha}{\delta},$$

woraus man erhält:

(10) $$\delta = \pm \sqrt{a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha}.$$

Zu jeder Richtung erhält man daher zwei parallele Ellipsentangenten, deren Abstände vom Anfangspunkte entgegengesetzt gleich sind. Ihre Berührungspunkte sind die Endpunkte desjenigen Durchmessers, dessen Richtung der gegebenen Richtung konjugiert ist.

Aufg. 1. Sprich Satz II in der Form aus: Die Parallelogramme, welche entstehen, wenn man die Endpunkte irgend zweier konjugierter Durchmesser verbindet, sind inhaltsgleich. Beweise, dafs auch die Parallelogramme, welche durch die Tangenten in den Endpunkten konjugierter Durchmesser gebildet werden, konstanten Inhalt haben.

Aufg. 2. Beweise Satz III mit Hülfe Gleichung (11), § 43. Es ist nämlich in dieser Formel $\mu = \operatorname{tg} v$, wenn v die excentrische Anomalie des Endpunktes des zu α gehörigen Durchmessers bedeutet; daher ist $\frac{1+\mu^2}{\mu} = \frac{2}{\sin 2v}$. Dieser Ausdruck wird aber für $v = 45^0$ ein Minimum.

Aufg. 3. Berechne mit Hülfe der vorhergehenden Aufgabe oder auch der Gleichungen (5) und (6) die trigonometrischen Funktionen des kleinsten Konjugationswinkels.

Aufg. 4. Aus der Länge a' eines Halbmessers berechne man die zugehörige excentrische Anomalie v und den Winkel α, den a' mit der x-Achse bildet. Mit Hülfe von (1) findet man:

$$\operatorname{tg} v = \sqrt{\frac{a^2 - a'^2}{a'^2 - b^2}}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a}\sqrt{\frac{a^2 - a'^2}{a'^2 - b^2}}.$$

Aufg. 5. Einem gegebenen Parallelogramm mit den Diagonalen $2a'$ und $2b'$, deren spitzer Winkel gleich ω sei, kann stets eine, aber auch nur eine Ellipse umschrieben werden, für welche jene Diagonalen konjugierte Durchmesser sind. Man findet nämlich zunächst die Achsen a und b in eindeutiger Weise aus $a^2 + b^2 = a'^2 + b'^2$ und $a'b' \sin \omega = ab$ und zwar erhält man:

$$a+b=\sqrt{a'^2+b'^2+2a'b' \sin\omega}, \quad a-b=\sqrt{a'^2+b'^2-2a'b' \sin\omega}.$$

Die Lage der Achse a findet man dann aus dem in Aufg. 4 gegebenen Ausdruck für $\operatorname{tg} \alpha$.

Aufg. 6. Führe die vorhergehende Aufgabe durch für $a' = 13$, $b' = 6$, $\sin \omega = \frac{7}{13}$.

Aufg. 7. Für die Abstände δ und δ' zweier zu einander senkrechter Tangenten an die Ellipse hat man:

$$\delta^2 = a^2 \cos^2\alpha + b^2 \sin^2 \alpha, \quad \delta'^2 = a^2 \sin^2\alpha + b^2 \cos^2\alpha,$$

folglich $\delta^2 + \delta'^2 = a^2 + b^2$. Beweise daraus, dafs der Ort der Schnittpunkte zu einander senkrechter Tangenten der mit dem Radius $\sqrt{a^2 + b^2}$ um den Mittelpunkt der Ellipse beschriebene Kreis ist.

§ 49. Pol und Polare.

Die auf zwei konjugierte Durchmesser $2a'$ und $2b'$ bezogene Gleichung einer Ellipse lautet:

(1) $$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} = 1.$$

Es seien nun zwei beliebige Punkte P_1 und P_2 gegeben, deren Koordinaten x_1, y_1 und x_2, y_2 sich auf dieselben schiefwinkligen Achsen $2a'$ und $2b'$ beziehen sollen. Um die Schnittpunkte der Geraden P_1, P_2 mit der Ellipse zu bestimmen, erinnern wir uns, dafs ein jeder Punkt P der Verbindungslinie $P_1 P_2$ durch die Koordinaten:

(2) $$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$$

dargestellt werden kann, insofern λ das Teilverhältnis von P in Bezug auf $P_1 P_2$ bedeutet. Soll P auch auf der Ellipse liegen, so müssen seine Koordinaten der Gleichung (1) genügen, d. h. es mufs sein:

$$\frac{1}{a'^2}\left(\frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}\right)^2 + \frac{1}{b'^2}\left(\frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}\right)^2 = 1,$$

oder geordnet:

(3) $$\lambda^2\left(\frac{x_2^2}{a'^2} + \frac{y_2^2}{b'^2} - 1\right) + 2\lambda\left(\frac{x_1 x_2}{a'^2} + \frac{y_1 y_2}{b'^2} - 1\right) + \left(\frac{x_1^2}{a'^2} + \frac{y_1^2}{b'^2} - 1\right) = 0.$$

Die beiden Wurzeln λ_1 und λ_2 dieser quadratischen Gleichung stellen die Teilverhältnisse der Schnittpunkte von P_1, P_2 mit der Ellipse dar. Eine jede Gerade trifft daher die Ellipse in zwei Punkten, deren Realität von der Diskriminante der quadratischen Gleichung abhängt (§ 43, Aufg. 7).

Liegen zufällig die Punkte P_1 und P_2 so, dafs der Koeffizient von 2λ, nämlich $\frac{x_1 x_2}{a'^2} + \frac{y_1 y_2}{b'^2} - 1$ verschwindet, so sind die Wurzeln von (3) einander entgegengesetzt gleich und es bilden dann die Punkte P_1 und P_2 mit den Schnittpunkten S_1 und S_2 (falls diese überhaupt reell sind) eine harmonische Gruppe. Sollen umgekehrt P_1, P_2, S_1, S_2 harmonische Punkte sein, so mufs $\lambda_1 = -\lambda_2$, d. h. $\frac{x_1 x_2}{a'^2} + \frac{y_1 y_2}{b'^2} - 1 = 0$ sein.

Dies vorausgeschickt, sei jetzt P_1 ein fester Punkt. Wir legen durch ihn alle möglichen Strahlen und bestimmen jedesmal zu P_1 und den beiden Schnittpunkten S_1 und S_2 (falls dieselben überhaupt reell sind) den vierten harmonischen P_1

zugeordneten Punkt P_2. Die Koordinaten von P_2 müssen allemal der Gleichung:

$$\frac{xx_1}{a'^2} + \frac{yy_1}{b'^2} = 1 \tag{4}$$

genügen und umgekehrt ist jeder Punkt, dessen Koordinaten (4) befriedigen, so gelegen, dafs seine Verbindungslinie mit P_1 durch die Ellipse harmonisch geteilt wird, falls sie dieselbe überhaupt in reellen Punkten trifft. Da aber (4) die Gleichung einer Geraden ist, so folgt:

Zieht man von einem beliebigen Punkte Strahlen nach einer Ellipse und bestimmt jedesmal zu den beiden Schnittpunkten und dem gegebenen Punkte als zugeordnetem den vierten harmonischen Punkt, so ist der Ort dieser vierten harmonischen Punkte eine gerade Linie.

Man nennt diese Gerade die Polare des gegebenen Punktes und diesen den Pol der Geraden.

Liegt P_1 innerhalb der Ellipse, so liegen die vierten harmonischen Punkte alle aufserhalb (§ 4), die Polare schneidet daher die Ellipse nicht. Befindet sich dagegen P_1 aufserhalb, so erhält man für jeden Strahl, welcher die Ellipse in reellen Punkten trifft, einen innerhalb gelegenen vierten harmonischen Punkt, die Polare trifft dann die Ellipse in zwei reellen Punkten. Sei P_2 ein solcher Schnittpunkt, so erfüllen die Koordinaten x_2, y_2 desselben nicht nur Gleichung (4), sondern es ist auch $\frac{x_2^2}{a'^2} + \frac{y_2^2}{b'^2} - 1 = 0$, d. h. die Wurzeln λ_1 und λ_2 von (3) werden beide unendlich grofs (vgl. § 56), die Schnittpunkte S_1 und S_2 fallen daher mit P_2 zusammen, sodafs P_1P_2 die Ellipse in P_2 berührt. Umgekehrt liegt der Berührungspunkt jeder von P_1 an die Ellipse gelegten Tangente auf der Polaren von P_1. Denn sei etwa P' mit den Koordinaten x', y' ein solcher Berührungspunkt, so wird die Gleichung seiner Tangente durch P_1 befriedigt, d. h. es ist $\frac{x_1 x'}{a'^2} + \frac{y_1 y'}{b'^2} = 1$. Diese Gleichung sagt aber zugleich aus, dafs x', y' die Gleichung (4) befriedigen, dafs also P' auf der Polaren von P_1 liegt. Zugleich geht

hieraus hervor, dafs von jedem aufserhalb gelegenen Punkte zwei reelle Tangenten an die Ellipse gelegt werden können.

Nehmen wir endlich an, der Pol P_1 liege auf der Ellipse, dann stellt (4) die Gleichung der Tangente von P_1 dar, d. h.: Die Tangente einer Ellipse ist die Polare ihres Berührungspunktes, dieser der Pol seiner Tangente. Dasselbe zeigt auch Gleichung (3); denn wenn der Koeffizient von λ und das absolute Glied verschwinden, so ist $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, d. h. die beiden Schnittpunkte S_1 und S_2 von P_1P_2 fallen zusammen, sodafs P_2 allemal auf der Tangente von P_1 liegen mufs.

Aufg. 1. Man konstruiere zu einem beliebigen Punkte P in Bezug auf eine Ellipse die Polare mittels des vollständigen Vierecks. Man lege durch P zwei Strahlen, welche die Ellipse resp. in R_1, R_2 und S_1, S_2 schneiden mögen. Die Verbindungslinie des Schnittpunktes von R_1S_2 und R_2S_1 mit dem Schnittpunkte von R_1S_1 und R_2S_2 ist die gesuchte Polare (§ 28).

Aufg. 2. P_1 liege aufserhalb der Ellipse. Man suche die für diesen Fall ausgesprochenen Sätze geometrisch dadurch abzuleiten, dafs man den durch P_1 gezogenen Strahl dreht, bis seine Schnittpunkte zusammenfallen.

Aufg. 3. Man überlege an Hand der Zeichnung, wie sich die Berührungssehne, d. h. die Verbindungslinie der Berührungspunkte der beiden von dem aufserhalb gelegenen Punkte P_1 an die Ellipse gelegten Tangenten bewegt, wenn P_1 sich immer mehr und mehr der Ellipse nähert.

Aufg. 4. Einer Ellipse sei ein beliebiges Viereck eingeschrieben. Die Schnittpunkte von je zwei Gegenseiten heifsen die drei Diagonalpunkte. Beweise, dafs jeder derselben der Pol der Verbindungslinie der beiden andern ist.

Aufg. 5. Man konstruiere von einem aufserhalb einer Ellipse gelegenen Punkte die beiden Tangenten an dieselbe mittels der Polaren (Aufg. 1).

§ 50. Lehrsätze über Pol und Polare.

Zu jedem Punkte P_1 existiert eine ganz bestimmte Polare, deren Gleichung:

$$\text{(1)} \qquad \frac{x x_1}{a'^2} + \frac{y y_1}{b'^2} = 1$$

war. Aber auch umgekehrt kann jede Gerade:

$$\text{(2)} \qquad Ax + By + C = 0$$

als die Polare eines ganz bestimmten Poles aufgefafst werden. Die Gleichungen (1) und (2) werden nämlich identisch, wenn man setzt:

$$\frac{x_1}{a'^2} = -\frac{A}{C}, \quad \frac{y_1}{b'^2} = -\frac{B}{C}$$

oder:

$$\text{(3)} \qquad x_1 = -\frac{A}{C} a'^2, \quad y_1 = -\frac{B}{C} b'^2.$$

Es ist daher $Ax + By + C = 0$ die Polare des durch (3) definierten Punktes. Die Formeln (3) werden für $C = 0$ illusorisch, insofern dann x_1 und y_1 unendlich grofs oder, wenn auch noch eine der Gröfsen A und B verschwinden sollte, unbestimmt werden. Da nun für $C = 0$ die gegebene Gerade ein Durchmesser wird und da es ganz gleichgültig ist, welches Paar konjugierter Durchmesser wir zu Koordinatenachsen wählen, so wollen wir diesen Fall folgendermafsen behandeln. Der Durchmesser $2b'$ werde parallel zu einer beliebig gegebenen Geraden gewählt, die wir dann parallel mit sich verschieben werden, bis sie mit dem Durchmesser $2b'$ d. h. mit der Ordinatenachse zusammenfällt. Die Gleichung der gegebenen Geraden bezogen auf die konjugierten Durchmesser $2a'$ und $2b'$ lautet dann:

$$\text{(4)} \qquad Ax + C = 0.$$

Folglich hat ihr Pol die Koordinaten:

$$\text{(5)} \qquad x_1 = -\frac{A}{C} a'^2, \quad y_1 = 0,$$

d. h. er liegt auf dem zur Richtung der Geraden konjugierten Durchmesser (vgl. § 46, II). Wird nun C immer kleiner und kleiner, bis die Gerade mit $2b'$ zusammenfällt, so wächst x_1 bis ins Unendliche, d. h.:

I. Der Pol eines Durchmessers ist der unendlich entfernte Punkt des konjugierten Durchmessers.

Wir kommen zu dem gleichen Resultate, wenn wir von dem Pole statt von der Polare ausgehen. Ist P_1 gegeben, so

können wir, ohne die Allgemeinheit zu stören, $2a'$ und $2b'$ so wählen, dafs P_1 auf den Durchmesser $2a'$ d. h. auf der x-Achse liegt. Dann lautet, wegen $y_1 = 0$, die Gleichung der Polaren von P_1:

$$\frac{x x_1}{a'^2} = 1$$

oder:

(6) $$x = \frac{a'^2}{x_1},$$

d. h. die Polare ist parallel zu dem Durchmesser, der dem durch P_1 gehenden konjugiert ist und fällt für $x_1 = \infty$ mit diesem zusammen.

In Bezug auf die Ellipse $\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} = 1$ mögen zwei Punkte P_1 und P_2 so liegen, dafs P_2 auf der Polaren von P_1 sich befindet. Dann mufs wegen (4) des vorigen Paragraphen die Gleichung bestehen:

(7) $$\frac{x_1 x_2}{a'^2} + \frac{y_1 y_2}{b'^2} = 1.$$

Diese Gleichung drückt dann aber auch aus, dafs P_1 auf der Polaren $\frac{x x_2}{a'^2} + \frac{y y_2}{b'^2} = 1$ von P_2 liegt und es gilt daher der Satz:

II. Liegt ein Punkt P_2 auf der Polaren von P_1, so liegt auch P_1 auf der Polaren von P_2 und umgekehrt.

Man kann diesen Satz auch so aussprechen:

III. Bewegt sich ein Punkt auf einer Geraden, so dreht sich seine Polare um den Pol der Geraden und umgekehrt, dreht sich eine Gerade um einen Punkt, so bewegt sich ihr Pol auf der Polaren des Punktes.

Da der Pol eines Durchmessers der unendlich ferne Punkt des konjugierten Durchmessers ist, und da alle Durchmesser durch den Mittelpunkt gehen, so müssen wir in Übereinstimmung mit III die unendlich fernen Punkte der Ebene als auf einer Geraden befindlich voraussetzen. Diese unendlich ferne Gerade der Ebene ist dann als die Polare des Mittelpunktes zu bezeichnen.

Aufg. 1. Man überzeuge sich, dafs die auf Pol und Polare bezüglichen Sätze unabhängig von dem Koordinatensystem sind. Dasselbe wurde nur zur Herleitung benutzt und, wie die Aus-

führungen des Textes zeigen, für den zu behandelnden Fall allemal zweckentsprechend gewählt.

Aufg. 2. Man leite die an die Gleichungen (4), (5) und (6) anknüpfenden Bemerkungen aus § 46 (insbesondere Satz II) ab; vergleiche namentlich die dort gegebene Gleichung: $OT_1 = \frac{a'^2}{x_1}$ mit (6).

Aufg. 3. Man leite I aus § 46 (Satz I) ab.

Aufg. 4. Leite aus II den folgenden Satz ab: Wenn durch einen Punkt P ein beliebiger Strahl nach einer Ellipse gezogen wird, welcher dieselbe in S_1 und S_2 trifft, so schneiden sich die Tangenten von S_1 und S_2 in einem Punkte Q der Polaren von P.

Aufg. 5. Man leite den in der vorhergehenden Aufgabe ausgesprochenen Satz aus § 49, Aufg. 1 dadurch ab, dafs man die Strahlen PR_1R_2 und PS_1S_2 zusammenfallen läfst.

Aufg. 6. Man konstruiere mit Benutzung von II zu einer die Ellipse nicht schneidenden Geraden den zugehörigen Pol.

§ 51. Brennpunktseigenschaften.

Für die zu einem beliebigen Punkte P der Ellipse:

(1) $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

gehörigen Brennstrahlen r und r' (§ 39) hatten wir gefunden:

(2) $$r^2 = (c - x)^2 + y^2, \quad r'^2 = (c + x)^2 + y^2.$$

Durch Subtraktion folgt:

$$(r' + r)(r' - r) = 4cx,$$

und da $r' + r = 2a$ ist:

$$r' - r = 2\frac{c}{a}x.$$

Führt man nun für die numerische Excentricität $\frac{c}{a}$ die Bezeichnung ε ein (§ 41), so erhält man zur Bestimmung von r und r' die beiden Gleichungen:

$$r' + r = 2a,$$
$$r' - r = 2\varepsilon x,$$

woraus sich ergiebt:

(3) $$r = a - \varepsilon x, \quad r' = a + \varepsilon x.$$

Führt man statt der Abscisse von P die excentrische Anomalie v ein, indem man $x = a \cos v$ setzt, so erhält man durch Multiplikation von r und r' mit Berücksichtigung von $c = \varepsilon a$ und $c^2 = a^2 - b^2$ die Gleichung:

(4) $$rr' = a^2 \sin^2 v + b^2 \cos^2 v.$$

Nach § 48, Gl. (2) ist aber die rechte Seite gleich b'^2, wenn b' der zu OP konjugierte Halbmesser ist. Wir erhalten daher die bemerkenswerte Gleichung:

(5) $$rr' = b'^2,$$

in Worten:

I. Das Produkt der Brennstrahlen eines Punktes ist gleich dem Quadrate des zu dem Punkte gehörigen konjugierten Halbmessers.

Um die Abstände d und d' der beiden Brennpunkte von der zu P gehörigen Tangente zu ermitteln, bringe man die Gleichung der letzteren, nämlich:

$$\frac{x \cos v}{a} + \frac{y \sin v}{b} = 1, \text{ (§ 48, Gl. (8))}$$

auf die Normalform und führe dann die Koordinaten der beiden Brennpunkte F und F' ein, wodurch man erhält:

(6) $$d = \frac{b}{b'}(a - c \cos v), \quad d' = \frac{b}{b'}(a + c \cos v)$$

oder:

(7) $$d = \frac{b}{b'}(a - \varepsilon x), \quad d' = \frac{b}{b'}(a + \varepsilon x),$$

und mit Rücksicht auf (3):

(8) $$d = \frac{b}{b'} r, \quad d' = \frac{b}{b'} r'.$$

Multipliziert man aber beide Gleichungen und beachtet (5), so folgt:

(9) $$dd' = b^2,$$

d. h.:

II. Das Produkt der Abstände der Brennpunkte von einer Tangente der Ellipse ist konstant und zwar gleich dem Quadrate der kleinen Halbachse.

Aus (8) erhält man die Relation:

(10) $$\frac{d}{r} = \frac{d'}{r'}.$$

Daraus folgt aber die Ähnlichkeit der beiden Dreiecke PFG und $PF'G'$ und mithin die Gleichheit der Winkel $\sphericalangle F'PG'$ und $\sphericalangle FPG$. Es gilt daher der Satz:

III. Die Tangente bildet mit den Brennstrahlen gleiche Winkel.

Nennt man die im Punkte P der Ellipse auf der Tangente senkrecht stehende Gerade die Normale der Ellipse in P, so kann man Satz III auch so aussprechen:

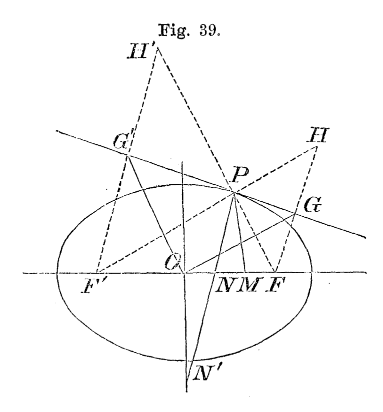


Fig. 39.

IV. Die Tangente und Normale eines Punktes der Ellipse sind die Winkelhalbierenden der beiden zu diesem Punkte gehörigen Brennstrahlen.

Aus diesem Satze ergiebt sich noch eine interessante Folgerung. Verlängert man nämlich das von dem Brennpunkte F auf die Tangente in P gefällte Lot $FG = d$ um sich selbst, wodurch man zu dem Gegenpunkte H von F geführt wird, so folgt aus:

$$\sphericalangle HPG = \sphericalangle FPG = \sphericalangle F'PG',$$

dafs die Punkte F', P, H in gerader Linie liegen. Nun ist:

$$F'H = F'P + PH = F'P + PF = 2a,$$

d. h.:

V. Der Ort der Gegenpunkte eines jeden der beiden Brennpunkte in Bezug auf eine bewegliche Tangente ist der mit dem Radius $2a$ um den andern Brennpunkt beschriebene Kreis.

Beachtet man, dafs FF' in O, FH in G, $F'H'$ in G' halbiert werden, so folgt, dafs OG und OG' resp. zu $F'H$ und FH' parallel sind. Man hat daher:

$$OG = \tfrac{1}{2} F'H \quad \text{und} \quad OG' = \tfrac{1}{2} FH'.$$

Da aber $F'H = FH' = 2a$ ist, so ergiebt sich:

$$OG = OG' = a,$$

d. h.:

VI. Der Ort der Fufspunkte der Lote, die man von den beiden Brennpunkten auf die sämtlichen Tangenten einer Ellipse fällen kann, ist der der Ellipse umschriebene Kreis.

Die Wichtigkeit aller dieser Sätze wird es rechtfertigen, wenn wir Satz IV, aus welchem sich V und VI als einfache geometrische Folgerungen ergaben, noch auf einem anderen, direkteren Wege ableiten. Bezeichnet man die Koordinaten von P jetzt mit x_1, y_1, so lautet die Gleichung der Tangente in P:

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1.$$

Da sich hieraus als Richtungskoefficient $-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}$ ergiebt, so ist der Richtungskoefficient der Normalen in P gleich $\frac{a^2y_1}{b^2x_1}$ und folglich deren Gleichung:

$$y - y_1 = \frac{a^2y_1}{b^2x_1}(x - x_1)$$

oder symmetrischer:

(11) $$a^2\frac{x - x_1}{x_1} = b^2\frac{y - y_1}{y_1}.$$

Setzt man $y = 0$, so findet man für den Achsenabschnitt ON den Wert:

$$ON = x_1 - \frac{b^2x_1}{a^2} = \frac{c^2}{a^2}x_1$$

oder:

(12) $$ON = \varepsilon^2 x_1.$$

Daher ist:

(13) $$F'N = c + \varepsilon^2 x_1 = \varepsilon(a + \varepsilon x_1) = \varepsilon r',$$

(14) $$FN = c - \varepsilon^2 x_1 = \varepsilon(a - \varepsilon x_1) = \varepsilon r.$$

Daraus aber folgt:

(15) $$F'N : FN = F'P : FP,$$

und es ist daher nach einem bekannten planimetrischen Satze die Normale die Winkelhalbierende der beiden Brennstrahlen.

Aufg. 1. Beweise aus den Richtungskoefficienten der Normalen und der beiden Brennstrahlen durch direktes Berechnen (§ 24) der beiden Winkel $\sphericalangle F'PN$ und $\sphericalangle FPN$ die Gleichheit derselben.

Aufg. 2. Konstruiere die Normale in einem Punkte der Ellipse.

Aufg. 3. Mit Hilfe der Gegenpunkte H und H' (Satz V) konstruiere von einem Punkte aufserhalb der Ellipse die beiden Tangenten an dieselbe.

Aufg. 4. Von dem einen Brennpunkte einer als spiegelnd gedachten Ellipse mögen nach allen Richtungen hin Strahlen (der Wärme, des Lichtes oder des Schalles) ausgehen. Welchen Weg nehmen die an der Ellipse nach dem bekannten Reflexionsgesetze reflektierten Strahlen?

Aufg. 5. Die Tangente und die Normale in P mögen die x-Achse in T und N schneiden. Beweise, dafs $OT . ON = c^2$ ist und schliefse daraus, dafs F, F', T, N harmonische Punkte sind.

Aufg. 6. Bestimme in Bezug auf F und F' zu jedem der Scheitel A und A' den vierten harmonischen Punkt A_1 resp. A_1' und zeige, dafs der Schnittpunkt N einer jeden Normalen stets zwischen A_1 und A_1' liegt. In welcher Beziehung stehen A_1 und A_1' zu den Normalen in A und A'?

Aufg. 7. Berechne das Stück MN — die sogenannte Subnormale von P.

Aufg. 8. Berechne das Stück PN — die sogenannte begrenzte Normale von P — mit Hilfe der excentrischen Anomalie von P und zeige, dafs $PN = \frac{b b'}{a}$, wo b' der zu OP konjugierte Halbmesser ist.

Aufg. 9. Berechne aus (11) den Achsenabschnitt ON' der Normalen mit der y-Achse.

Aufg. 10. Beweise mit Hilfe der vorhergehenden Aufgabe, dafs $PN' = \frac{ab'}{b}$ ist und leite daraus die Sätze ab:

$$PN . PN' = b'^2 \quad \text{und} \quad PN : PN' = b^2 : a^2 = \text{Const.}$$

Aufg. 11. Bringe den Cosinus des in Aufg. 1 berechneten Winkels $\sphericalangle FPN = \varphi$ mit Hilfe der excentrischen Anomalie auf die Form $\cos \varphi = \frac{b}{b'}$ und beweise daraus, dafs die Projektion der Normalen $PN = \frac{b b'}{b}$ auf einen Brennstrahl konstant und zwar gleich dem Halbparameter p ist.

Aufg. 12. Beweise folgenden Satz: Eine Gerade schneidet die Ellipse, berührt sie oder liegt ganz aufserhalb derselben, je nachdem der Fufspunkt des von einem Brennpunkte auf die Gerade gefällten Lotes innerhalb, auf der Peripherie oder aufserhalb des umschriebenen Kreises liegt.

§ 52. Die Directrix.

Man nennt die Polare eines Brennpunktes eine Directrix der Ellipse. Ihre Gleichung erhalten wir aus:

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1;$$

indem wir $x_1 = c$, $y_1 = 0$ setzen, demnach:

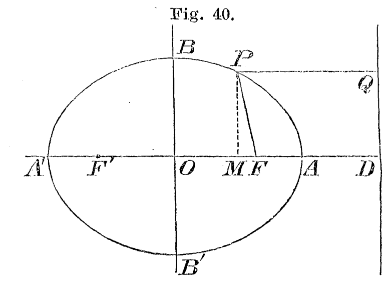
(1) $$x = \frac{a^2}{c}.$$

In gleicher Weise existiert für den andern Brennpunkt eine Directrix mit der Gleichung $x = -\frac{a^2}{c}$.

Die Directrix des Brennpunktes F ist also, ebenso wie die von F', eine Gerade, welche im Abstande $\frac{a^2}{c} = \frac{a}{\varepsilon}$ vom Mittelpunkte auf der grofsen Achse senkrecht steht. Sie läfst sich daher leicht konstruieren.

Berechnet man für einen beliebigen Ellipsenpunkt P den Abstand PF von dem Brennpunkte F und den Abstand PQ von der zu F gehörigen Directrix, so erhält man:

Fig. 40.



$PF = r = a - \varepsilon x$,

$PQ = \frac{a}{\varepsilon} - x = \frac{1}{\varepsilon}(a - \varepsilon x)$,

folglich:

(2) $$\frac{PF}{PQ} = \varepsilon,$$

d. h.:

I. Das Verhältnis der Abstände eines Punktes der Ellipse von einem Brennpunkte und der zugehörigen Directrix ist konstant und zwar gleich der numerischen Excentricität.

Für den andern Brennpunkt F' würden wir aus:

$$PF' = a + \varepsilon x \quad \text{und} \quad PQ' = \frac{a}{\varepsilon} + x = \frac{1}{\varepsilon}(a + \varepsilon x)$$

dasselbe Resultat $\frac{PF'}{PQ'} = \varepsilon$ erhalten haben.

Die Polare eines beliebigen Punktes (x_1, y_1) der zu F gehörigen Directrix hat wegen $x_1 = \frac{a^2}{c}$ die Gleichung:

$$\frac{x}{c} + \frac{yy_1}{b^2} = 1$$

und geht, wie auch aus der Gleichung zu erkennen ist, durch den Brennpunkt F (§ 50). Da aber der Richtungskoefficient dieser Polaren gleich $-\frac{b^2}{cy_1}$ ist, während die Verbindungslinie des Punktes (x_1, y_1) mit F den Richtungskoefficienten $\frac{cy_1}{b^2}$ besitzt, so folgt:

II. Die Verbindungslinie eines Brennpunktes mit dem Pole einer beliebigen durch ihn hindurchgehenden Sehne steht senkrecht auf dieser.

Aufg. 1. Welches ist die Directrix des Kreises und wie modifizieren sich für diesen die Sätze I und II?

Aufg. 2. Lege mit Hilfe von II von einem beliebigen Punkte der Directrix die beiden Tangenten an die Ellipse.

Aufg. 3. Beweise, dafs die Entfernung eines Brennpunktes von der zugehörigen Directrix gleich $\frac{p}{\varepsilon}$ ist, wo p den Halbparameter bedeutet. Daraus folgt dann, dafs eine Ellipse vollständig bestimmt ist, wenn man einen Brennpunkt, die zugehörige Directrix und die numerische Excentricität kennt (§ 41, Aufg. 8).

§ 53. Flächeninhalt der Ellipse.

Wir haben früher (§ 13, Aufg. 6) gesehen, dafs wenn man aus einem Polygon dadurch ein anderes ableitet, dafs man, unter Voraussetzung eines beliebigen Koordinatensystems, die Abscissen der Ecken ungeändert läfst, die Ordinaten dagegen sämtlich in dem konstanten Verhältnis $a : b$ verkürzt, der Inhalt des alten Polygons zu dem des neuen sich wie $a : b$ ver-

hält. Es folgt dieser Satz unmittelbar aus der § 13 abgeleiteten Formel für den Inhalt eines Vielecks.

Betrachtet man nun eine krummlinig begrenzte, geschlossene Figur als die Grenze, welcher sich ein eingeschriebenes Polygon dadurch nähert, dafs man die Anzahl der Polygonseiten über alle Grenzen wachsen läfst, und berücksichtigt, dafs der oben ausgesprochene Satz über das Verhältnis entsprechender Polygone ganz unabhängig von der Anzahl der Polygonseiten ist, so ergiebt sich die Folgerung:

Leitet man aus einer beliebigen, krummlinig oder geradlinig begrenzten, geschlossenen Figur dadurch eine andere ab, dafs man bei ungeänderter Abscisse die Ordinate eines jeden Punktes der Begrenzungslinie in dem konstanten Verhältnis $a:b$ verkürzt, so verhält sich der Inhalt der alten Figur zu dem der neuen wie a zu b.

Da nun in dieser Weise die Ellipse aus dem ihr umschriebenen Kreise abgeleitet werden kann, so verhält sich der Inhalt des Kreises zu dem der Ellipse wie $a:b$ und wir erhalten daher für den Inhalt der Ellipse die Formel:

$$(1) \qquad J = \pi ab.$$

Es gilt das gleiche Verhältnis aber auch für jeden beliebigen Teil des Kreises und den entsprechenden Teil der Ellipse, also beispielsweise für einen beliebigen Kreissektor und den entsprechenden Ellipsensektor. Wenn daher irgend zwei Kreissektoren inhaltsgleich sind, so sind es auch die entsprechenden Ellipsensektoren. Oder wenn überhaupt der Kreis in irgend welcher Weise in n gleiche Teile geteilt wird, so wird von den entsprechenden Linien auch die Ellipse in n gleiche Teile geteilt. So wird beispielsweise der Kreis durch zwei auf einander senkrechte Durchmesser in vier gleiche Quadranten zerlegt und wir haben daher:

Die Ellipse wird durch je zwei konjugierte Durchmesser in vier inhaltsgleiche Teile geteilt.

Der letztere Satz folgt auch leicht aus der Symmetrie der Ellipse in Bezug auf konjugierte Durchmesser.

Formel (1) kann noch verallgemeinert werden, insofern

man statt der auf einander senkrechten Halbachsen a, b zwei beliebige konjugierte Halbmesser a', b' und den zugehörigen Konjugationswinkel ω als bekannt voraussetzen kann. Dafs dadurch eine Ellipse vollständig bestimmt ist, haben wir § 48, Aufg. 5 gesehen. Da nun $ab = a'b' \sin \omega$ ist, so geht (1) über in:

$$J = \pi a'b' \sin \omega. \tag{2}$$

Aufg. 1. Bestimme den Inhalt einer Ellipse aus dem Halbparameter p und der numerischen Excentricität ε.

Aufg. 2. Bestimme den Inhalt einer Ellipse aus der grofsen Achse und der numerischen Excentricität.

Aufg. 3. Teile von der grofsen Achse ausgehend die Ellipse in 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10 inhaltsgleiche Teile.

Aufg. 4. Löse dieselbe Aufgabe von einem beliebigen Halbmesser ausgehend.

Aufg. 5. Berechne die Achsen und den Inhalt der Ellipse, für welche die beiden gleich grofsen konjugierten Durchmesser, deren Länge $2a'$ sei, unter 45^0 gegen einander geneigt sind.

Fünftes Kapitel.

Die Hyperbel.

§ 54. Definition und Gleichung.

Die Hyperbel ist der Ort aller Punkte, für welche die Differenz der Abstände von zwei festen Punkten konstant ist.

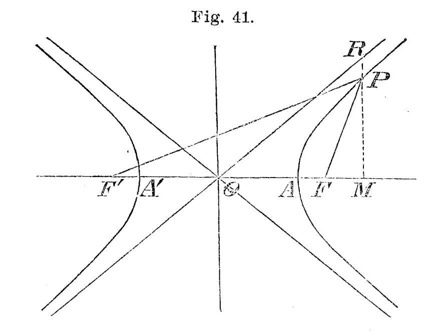
Die beiden festen Punkte F und F' nennt man die Brennpunkte, ihren halben Abstand die Excentricität der Hyperbel. Die von irgend einem Punkte P der Hyperbel nach den Brennpunkten gezogenen Strahlen heifsen Brennstrahlen.

Um die Gleichung der Hyperbel abzuleiten, wählen wir, wie bei der Ellipse, FF' als x-Achse und den Mittelpunkt von FF' als Anfangspunkt eines rechtwinkligen Koordinaten-

systems. Es sei $FF' = 2c$, $PF = r$, $PF' = r'$ und die konstante Differenz der beiden Brennstrahlen r und r' gleich $2a$. Aus $PF' - PF < FF'$ folgt dann, dafs $a < c$ sein mufs. Nun ist:

$$r = \sqrt{(c-x)^2 + y^2}, \quad r' = \sqrt{(c+x)^2 + y^2}.$$

Fig. 41.



Man erhält daher als Gleichung der Hyperbel:

(1) $$\sqrt{(c-x)^2 + y^2} - \sqrt{(c+x)^2 + y^2} = 2a.$$

Wie bei der Ellipse findet man durch zweimaliges Quadrieren hieraus:

$$x^2(a^2 - c^2) + y^2a^2 - a^2(a^2 - c^2) = 0,$$

welche Gleichung sogar genau mit der entsprechenden Ellipsengleichung übereinstimmt. Da aber bei der Hyperbel $a < c$ ist, müssen wir jetzt die Abkürzung:

(2) $$c^2 - a^2 = b^2$$

benutzen und erhalten dann nach Division mit a^2b^2 die Gleichung der Hyperbel in der Form:

(3) $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Wie bei der Ellipse schliefsen wir aus dem Umstande, dafs die Gleichung nur die Quadrate von x und y enthält, auf die Symmetrie der Hyperbel in Bezug auf die Koordinatenachsen. Während aber bei der Ellipse jede durch den Anfangspunkt O gehende Gerade $y = \mu x$ die Kurve in zwei reellen zu O symmetrisch gelegenen Punkten traf, begegnen wir bei der Hyperbel einer bemerkenswerten Abweichung.

Auch hier erhält man zwar (indem man in (3) μx an die Stelle von y setzt) für die Abscissen der Schnittpunkte zwei entgegengesetzt gleiche Werte, nämlich: $x = \pm \frac{ab}{\sqrt{b^2 - a^2\mu^2}}$, aber diese sind nur dann reell, wenn $b^2 - a^2\mu^2 > 0$, d. h. wenn μ absolut genommen kleiner als $\frac{b}{a}$ ist. Konstruiert man daher durch O die beiden zu den Achsen symmetrisch gelegenen Geraden $y = +\frac{b}{a}x$ und $y = -\frac{b}{a}x$, so werden nur diejenigen Geraden die Hyperbel in reellen zu O symmetrisch gelegenen Punkten treffen, welche in demselben Winkelraume liegen wie die x-Achse; diejenigen Geraden aber, welche den andern Winkelraum durchschneiden, haben keine reellen Punkte mit der Hyperbel gemein.

Man nennt jede durch O hindurchgehende Gerade einen Durchmesser der Hyperbel, unterscheidet dann aber, je nachdem die Schnittpunkte mit der Hyperbel reell sind oder nicht, zwischen reellen oder Hauptdurchmessern und imaginären oder Nebendurchmessern.

Der Punkt O heifst der Mittelpunkt der Hyperbel.

Aus der nach y aufgelösten Gleichung der Hyperbel:

$$(4) \qquad y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$$

erkennt man, dafs y nur dann reelle Werte erhält, wenn x absolut genommen gröfser als a ist. Legt man daher durch die beiden Punkte $x = +a$ und $x = -a$ der x-Achse zwei Parallelen zur y-Achse, so finden sich innerhalb dieses Parallelstreifens keine Punkte der Hyperbel. Für $x = \pm a$ wird $y = 0$, die Hyperbel trifft daher die x-Achse in zwei Punkten A, A', deren Entfernung gleich $2a$ ist, und die folglich zwischen den beiden Brennpunkten sich befinden. Die Punkte A, A' heifsen die Scheitel, ihre Verbindungslinie die Hauptachse der Hyperbel.

Läfst man x von $x = a$ an wachsen (die Symmetrie der Hyperbel gestattet die Beschränkung der Diskussion auf positive Werte von x), so nimmt auch y immer gröfsere Werte an. Für $x = c$ erhält man die beiden entgegengesetzt gleichen

Ordinaten $y = \pm \frac{b^2}{a}$ des Brennpunktes F. Man bedient sich auch hier der abkürzenden Bezeichnung:

(5) $$p = \frac{b^2}{a},$$

und nennt p den Halbparameter der Hyperbel.

Läfst man x über alle Grenzen wachsen, so wächst auch y über alle Grenzen. Dabei zeigt sich aber ein merkwürdiges Verhalten. Schreibt man nämlich (4) in der Form:

(6) $$y = \frac{b}{a} x \sqrt{1 - \left(\frac{a}{x}\right)^2}$$

und berücksichtigt, dafs bei wachsendem x der Quotient $\frac{a}{x}$ sich immer mehr der Null nähert, so ergiebt sich, dafs die beiden zu demselben x gehörigen entgegengesetzt gleichen Ordinaten der Hyperbel sich immer weniger und weniger unterscheiden von den beiden zu dem gleichen x gehörigen Ordinaten $y = \frac{b}{a} x$ und $y = -\frac{b}{a} x$, welche den oben besprochenen geraden Linien entsprechen. Es wird daher (indem wir uns für den Augenblick auf den ersten Quadranten allein beschränken) die zu einem x gehörige Ordinatendifferenz PR mit wachsenden x immer kleiner und kleiner werden, sodafs sich der Hyperbelast der Geraden $y = \frac{b}{a} x$ immer mehr und mehr nähert, ohne sie jedoch jemals zu erreichen.

Nach allem diesem erhalten wir jetzt folgende Vorstellung von dem Verlaufe der Hyperbel. Dieselbe besteht aus zwei vollständig von einander getrennten zur y-Achse symmetrisch gelegenen Teilen. Der eine Teil liegt rechts von der Geraden $x = a$ und vollständig eingeschlossen von den beiden symmetrisch zur x-Achse gelegenen Geraden $y = + \frac{b}{a} x$ und $y = - \frac{b}{a} x$. Er beginnt in dem Punkte $x = a$ der x-Achse und steigt symmetrisch zu der letzteren nach beiden Seiten auf, sich immer mehr und mehr jenen beiden Geraden anschliefsend, ohne dieselben jedoch wirklich zu erreichen. Einen analogen Verlauf nimmt der zweite Teil der Hyperbel, der vom Punkte $x = -a$ der x-Achse an aufsteigend sich ebenfalls immer

und mehr jenen beiden Geraden anschliefst. Man nennt diese beiden Geraden die Asymptoten der Hyperbel; ihre Gleichungen sind:

(7) $$y = \frac{b}{a} x \quad \text{und} \quad y = -\frac{b}{a} x,$$

oder auch:

(8) $$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0.$$

Für $b = a$ stehen die beiden Asymptoten auf einander senkrecht, ihre Gleichungen lauten dann einfacher $x - y = 0$ und $x + y = 0$. Man nennt diese specielle Hyperbel, deren Gleichung sich in der Form $x^2 - y^2 = a^2$ darstellt, eine gleichseitige.

Aufg. 1. Man konstruiere mit Benutzung der Definition die Hyperbel, für welche $a = 2$, $c = 3$ ist.

Aufg. 2. Zeige, dafs jede Parallele zur Hauptachse die Hyperbel in zwei reellen Punkten trifft.

Aufg. 3. Finde die Brennpunkte der Hyperbel:

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

und zeichne ihre Asymptoten.

Aufg. 4. Wie heifst die Gleichung der Hyperbel, deren Hauptachse $2a$ und deren Halbparameter p gegeben sind?

Aufg. 5. Bestimme die Endpunkte der durch $y = \mu x$ und $y = -\mu x$ dargestellten Durchmesser und diskutiere das Resultat.

Aufg. 6. Berechne und konstruiere aus je zweien der vier Gröfsen a, b, c, p die beiden andern.

Aufg. 7. Bei der Ellipse ist stets $a \geqq b$. Besteht diese Bedingung auch bei der Hyperbel?

Aufg. 8. Von einer Hyperbel kennt man die Asymptoten und die Scheitel. Man konstruiere die Brennpunkte.

Aufg. 9. Welche Kurve wird durch die Gleichung:

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

dargestellt?

§ 55. Polargleichung der Hyperbel bezogen auf den Mittelpunkt.

Ein beliebiger Punkt P der Hyperbel:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{1}$$

werde mit dem Mittelpunkte O durch den Halbmesser OP verbunden.

Führt man alsdann in (1) statt der rechtwinkligen Koordinaten x, y von P die Polarkoordinaten r, u ein, indem man setzt:

$$x = r \cos u, \quad y = r \sin u, \tag{2}$$

so erhält man die auf den Mittelpunkt bezogene Polargleichung der Hyperbel:

$$\frac{1}{r^2} = \frac{\cos^2 u}{a^2} - \frac{\sin^2 u}{b^2}, \tag{3}$$

die man auch in der Form:

$$r^2 = \frac{a^2 b^2}{b^2 \cos^2 u - a^2 \sin^2 u} \tag{4}$$

schreiben kann.

Berücksichtigt man $\sin^2 u = 1 - \cos^2 u$ und $a^2 + b^2 = c^2$, so erhält man hieraus:

$$r^2 = \frac{a^2 b^2}{c^2 \cos^2 u - a^2}. \tag{5}$$

Man bedient sich, wie bei der Ellipse, der Bezeichnung:

$$\frac{c}{a} = \varepsilon, \quad (\varepsilon > 1), \tag{6}$$

und nennt im Gegensatze zu der linearen Excentricität c die Gröfse ε die numerische Excentricität. Die Polargleichung der Hyperbel nimmt jetzt die Form an:

$$r^2 = \frac{b^2}{\varepsilon^2 \cos^2 u - 1}, \tag{7}$$

welche sich nur durch das Vorzeichen von der entsprechenden Ellipsengleichung unterscheidet (§ 41).

Aus (5) ersieht man, dafs r für $u = 0$ einen kleinsten Wert, nämlich a, erhält und dafs r mit wachsendem u ebenfalls zunimmt. Während aber bei der Ellipse r immer end-

lich blieb, wächst bei der Hyperbel der Halbmesser über alle Grenzen, je mehr sich u dem durch die Gleichung:

$$c^2 \cos^2 u - a^2 = 0,$$

oder:

$$b^2 \cos^2 u - a^2 \sin^2 u = 0 \tag{8}$$

definierten Werte von u nähert. Läfst man daher u von $u = 0$ an wachsen, so wird r unendlich grofs, sobald:

$$\operatorname{tg} u = \frac{b}{a} \tag{9}$$

wird. Nimmt u weiter zu, so wird r^2 negativ, also r imaginär, bis:

$$\operatorname{tg} u = -\frac{b}{a} \tag{10}$$

geworden ist. Für diesen Wert wird r wieder unendlich grofs und nimmt dann mit wachsendem u allmählich ab, bis es für $u = 180^0$ wieder den kleinsten Wert, nämlich a, erreicht.

Da durch (9) und (10) die Asymptoten bestimmt werden, so sieht man, dafs diese als Durchmesser zu bezeichnen sind, welche die Hyperbel im Unendlichen schneiden.

Die beiden Asymptoten der Hyperbel trennen die Durchmesser mit reellen Schnittpunkten — die Hauptdurchmesser — von denen, welche keine reellen Schnittpunkte ergeben und welche wir als Nebendurchmesser bezeichnet hatten. Zu den letzteren gehört insbesondere die y-Achse. Es ist nun für manche Untersuchungen vorteilhaft, auch diesen Nebendurchmessern eine bestimmte Länge beizumessen, nämlich in folgender Weise. Für einen Nebendurchmesser ist $\operatorname{tg} u$ absolut genommen gröfser als $\frac{b}{a}$ und folglich, wie wir bereits sahen, $r^2 = \frac{a^2 b^2}{b^2 \cos^2 u - a^2 \sin^2 u}$ eine negative Gröfse. Man kann daher vom Anfangspunkte O aus auf dem zu u gehörigen Nebendurchmesser vorwärts und rückwärts die Strecke $\varrho = \sqrt{-r^2}$ abtragen und gelangt so zu zwei ganz bestimmten zu O symmetrisch gelegenen Punkten Q und Q'. Für einen jeden dieser Punkte gilt dann die Gleichung:

$$\varrho^2 = - r^2,$$

und folglich:

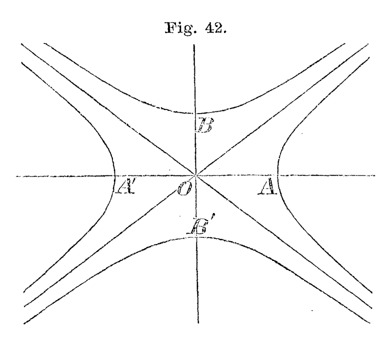
(11) $$\frac{1}{\varrho^2} = \frac{\sin^2 u}{b^2} - \frac{\cos^2 u}{a^2}.$$

Führt man aber für $\varrho \cos u$ und $\varrho \sin u$ die rechtwinkligen Koordinaten x und y von Q ein, so geht (11) über in:

(12) $$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1.$$

Daraus folgt, dafs der Ort der Punkte Q und Q' ebenfalls eine Hyperbel ist. Die Hauptachse derselben fällt in die y-Achse, ihre Scheitel B und B' sind vom Mittelpunkte O um b entfernt und ihre Excentricität ist gleich $\sqrt{a^2 + b^2}$, d. h. gleich der Excentricität der gegebenen Hyperbel.

Fig. 42.



Dadurch ist die zweite Hyperbel vollständig bestimmt. Sie wird die konjugierte Hyperbel der gegebenen genannt. Man nennt überdies BB' die Nebenachse der gegebenen Hyperbel und dementsprechend AA' die Nebenachse der konjugierten.

Konjugierte Hyperbeln haben dieselben Asymptoten und stehen in der Beziehung zu einander, dafs die Nebendurchmesser der einen die Hauptdurchmesser der andern sind.

Aufg. 1. Entscheide, ob der zu der Geraden:

$$2x - 7y + 1 = 0$$

parallele Durchmesser der Hyperbel $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$ ein Hauptdurchmesser oder ein Nebendurchmesser ist.

Aufg. 2. Berechne die numerische Excentricität der Hyperbel $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

Aufg. 3. Beweise die Gleichungen:

$$a = \frac{p}{\varepsilon^2 - 1}, \quad b = \frac{p}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}},$$

wo p den Halbparameter bedeutet.

Aufg. 4. Drücke b, c, p durch a und ε aus.

Aufg. 5. Welchen Wert hat ε für die gleichseitige Hyperbel?

Aufg. 6. Beweise, dafs zwei Hyperbeln mit derselben numerischen Excentricität einander ähnlich sind. Beachte insbesondere die Gleichheit der Asymptotenwinkel.

Aufg. 7. Berechne den Asymptotenwinkel w aus der numerischen Excentricität. Man findet:

$$\sin w = \frac{2ab}{a^2 + b^2} = \frac{2\sqrt{\varepsilon^2 - 1}}{\varepsilon^2}.$$

Aufg. 8. Es sei r ein reeller Halbmesser einer Hyperbel und r' der dazu senkrechte reelle Halbmesser der konjugierten Hyperbel. Beweise die Gleichung $\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r'^2} = \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}$ (§ 41).

Aufg. 9. Beweise, dafs die gemeinsamen Asymptoten zweier konjugierter Hyperbeln die Diagonalen des durch die Scheitel A, A', B, B' bestimmten Rechtecks sind.

Aufg. 10. Zeige, dafs die vier Brennpunkte zweier konjugierter Hyperbeln auf einem um O beschriebenen Kreise liegen.

Aufg. 11. Beweise mittels des Ausdrucks:

$$\varrho^2 \left(\frac{\cos^2 u}{a^2} - \frac{\sin^2 u}{b^2}\right) - 1 = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1,$$

dafs die Hyperbel alle Punkte der Ebene, für welche:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1$$

positiv ist, von denen trennt, für welche dieser Ausdruck negativ ist. Zu welchem Gebiete gehören Mittelpunkt und Brennpunkte?

§ 56. Die Hyperbel und die Gerade.

Um die Schnittpunkte einer Geraden:

(1) $$y = \mu x + m$$

mit der Hyperbel:

(2) $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

zu bestimmen, setze man den durch (1) gelieferten Wert von

y in (2) ein. Man erhält dann nach leichter Reduktion die quadratische Gleichung:

(3) $$x^2(b^2 - a^2\mu^2) - 2\mu m a^2 x - a^2(b^2 + m^2) = 0.$$

Bezeichnet man die beiden Wurzeln derselben mit x_1 und x_2 und berechnet aus (1) die zugehörigen y_1 und y_2, so ergiebt sich als erstes Resultat, dafs die Hyperbel, ebenso wie die Ellipse, von jeder Geraden in zwei Punkten geschnitten wird (§ 43, Aufg. 7). Die Realität derselben hängt von dem Vorzeichen der Diskriminante ab, die sich in der Form $a^2b^2(m^2 + b^2 - a^2\mu^2)$ darstellt. Je nachdem dieser Ausdruck positiv, Null oder negativ ist, sind die Wurzeln von (3) reell und verschieden, reell und zusammenfallend oder imaginär. Nehmen wir zunächst an, es sei $b^2 - a^2\mu^2 > 0$, d. h. $\mu^2 < \frac{b^2}{a^2}$. Dann ist die Gerade (1) einem Hauptdurchmesser parallel und die Diskriminante zeigt, dafs dann allemal zwei reelle und von einander verschiedene Schnittpunkte existieren. Sind ihre Abscissen x_1 und x_2, so lehrt überdies die quadratische Gleichung (3), dafs x_1x_2 negativ ist, dafs also die Schnittpunkte auf verschiedenen Seiten der y-Achse liegen, d. h. dafs die Gerade beide Hyperbeläste trifft.

Ist $b^2 - a^2\mu^2 < 0$, d. h. $\mu^2 > \frac{b^2}{a^2}$, so läuft die Gerade (1) einem Nebendurchmesser parallel und die Schnittpunkte sind dann reell und verschieden, reell und zusammenfallend oder imaginär, je nachdem $m^2 \gtreqless a^2\mu^2 - b^2$ ist. Im ersteren Falle liegen dann aber die beiden Schnittpunkte stets auf demselben Hyperbelast, da, wie Gleichung (3) zeigt, das Produkt x_1x_2 positiv ausfällt.

Ist endlich $b^2 - a^2\mu^2 = 0$, also $\mu^2 = \frac{b^2}{a^2}$, so ist die Gerade einer der beiden Asymptoten parallel. In diesem Falle reduziert sich die quadratische Gleichung (3) auf die lineare:

(4) $$2\mu m x + b^2 + m^2 = 0,$$

welche eine einzige Wurzel:

(5) $$x = -\frac{b^2 + m^2}{2\mu m}$$

liefert.

Eine jede zu einer der Asymptoten parallele Gerade trifft daher die Hyperbel in nur einem Punkte, welcher ins Unendliche rückt, wenn aufser $b^2 - a^2\mu^2 = 0$ auch noch $m = 0$ ist, d. h. wenn die Gerade (1) mit einer der beiden Asymptoten zusammenfällt.

Man kann den durch $b^2 - a^2\mu^2 = 0$ charakterisierten Fall aber auch noch in anderer Weise deuten. Betrachtet man nämlich in einer quadratischen Gleichung $Ax^2 + 2Bx + C = 0$ die Koefficienten A, B, C als veränderliche Gröfsen und bringt die beiden Wurzeln:

$$x_1 = \frac{-B + \sqrt{B^2 - AC}}{A} = \frac{(-B + \sqrt{B^2 - AC})(B + \sqrt{B^2 - AC})}{A(B + \sqrt{B^2 - AC})}$$

und:

$$x_2 = \frac{-B - \sqrt{B^2 - AC}}{A} = \frac{(-B - \sqrt{B^2 - AC})(-B + \sqrt{B^2 - AC})}{A(-B + \sqrt{B^2 - AC})}$$

auf die Form:

$$x_1 = \frac{-C}{B + \sqrt{B^2 - AC}}, \quad x_2 = \frac{-C}{B - \sqrt{B^2 - AC}},$$

so erkennt man, dafs für $A = 0$ die Wurzel x_2 unendlich grofs wird, während x_1 den Wert $\frac{-C}{2B}$ annimmt. Wird dann auch noch $B = 0$, so erhält man auch für x_1 einen unendlich grofsen Wert und es sind dann die beiden Wurzeln x_1 und x_2 einander gleich, insofern die Diskriminante $B^2 - AC$ für $A = B = 0$ verschwindet. Man kann dies so ausdrücken: Verschwindet in der quadratischen Gleichung:

$$Ax^2 + 2Bx + C = 0$$

der Koefficient A, während B von Null verschieden ist, so hat die quadratische Gleichung eine endliche und eine unendlich grofse Wurzel. Verschwinden A und B gleichzeitig, so sind beide Wurzeln einander gleich und unendlich grofs.

Wendet man diese Betrachtungen auf die quadratische Gleichung (3) für den Fall $b^2 - a^2\mu^2 = 0$ an, so erkennt man, dafs dieselbe eine endliche und eine unendlich grofse Wurzel besitzt, so lange m von Null verschieden ist. Sobald aber $m = 0$ wird, werden beide Wurzeln einander gleich und unendlich grofs, d. h.:

Jede zu einer Asymptote parallele Gerade trifft die Hyperbel in einem im Endlichen gelegenen und in einem unendlich fernen Punkte. Die beiden Asymptoten selbst schneiden die Hyperbel in zwei zusammenfallenden unendlich fernen Punkten und sind die einzigen Geraden dieser Art.

Dem entsprechend hat man die im ersten und im dritten Quadranten und ebenso die im zweiten und im vierten Quadranten befindlichen Hyperbeläste als im unendlich fernen Punkte der betreffenden Asymptote zusammenhängend anzusehen. Die Hyperbel hat also zwei unendlich entfernte Punkte und die beiden Asymptoten sind als die Tangenten der Hyperbel in diesen unendlich fernen Punkten zu betrachten, insofern eine jede von ihnen mit der Hyperbel zwei zusammenfallende unendlich ferne Punkte gemein hat.

Aufg. 1. Bestimme die Schnittpunkte der Geraden:

$$7x - 3y + 2 = 0$$

mit der Hyperbel $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{81} = 1$.

Aufg. 2. Welche Beziehung mufs zwischen A, B, C stattfinden, damit die Gerade $Ax + By + C = 0$ die Hyperbel $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ berührt, d. h. dieselbe in zusammenfallenden Punkten schneidet?

Aufg. 3. Giebt es Tangenten, die einem Hauptdurchmesser parallel laufen?

Aufg. 4. Innerhalb welcher Grenzen bewegen sich die Richtungskoefficienten sämtlicher Tangenten einer Hyperbel?

Aufg. 5. Ist $b^2 - a^2\mu^2 < 0$, so gehören zu jedem μ zwei parallele Tangenten, deren Gleichungen:

$$y = \mu x \pm \sqrt{a^2\mu^2 - b^2}$$

sind. Zeige, dafs ihre Berührungspunkte die Endpunkte eines Durchmessers sind.

§ 57. Konjugierte Durchmesser.

Angenommen die Gerade:

$$(1) \qquad y = \mu x + m$$

treffe die Hyperbel:



(2) $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

in zwei reellen Punkten P_1 und P_2, so sind die Abscissen x_1 und x_2 derselben die Wurzeln der quadratischen Gleichung:

(3) $$x^2 (b^2 - a^2 \mu^2) - 2 \mu m a^2 x - a^2 (b^2 + m^2) = 0.$$

Für die Abscisse x des Mittelpunktes der Sehne $P_1 P_2$ hat man daher:

(4) $$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{\mu m a^2}{b^2 - a^2 \mu^2}.$$

Setzt man diesen Wert in (1) ein, so erhält man die Ordinate des Mittelpunktes von $P_1 P_2$, nämlich:

$$y = \frac{\mu^2 m a^2}{b^2 - a^2 \mu^2} + m,$$

oder:

(5) $$y = \frac{m b^2}{b^2 - a^2 \mu^2}.$$

Wenn man aber Gleichung (5) durch (4) dividiert, so erhält man:

(6) $$y = \frac{b^2}{\mu a^2} x,$$

eine Gleichung, welche m nicht mehr enthält und welche folglich zwischen den Koordinaten des Mittelpunktes einer jeden zur Geraden (1) parallelen Sehne besteht. Da aber (6) einen Durchmesser darstellt, so gilt der Satz:

I. Die Mittelpunkte paralleler Sehnen einer Hyperbel liegen auf einem Durchmesser.

Setzen wir $\mu = \operatorname{tg} \alpha$, $\frac{b^2}{\mu a^2} = \operatorname{tg} \beta$, so besteht also zwischen den Richtungskoefficienten der parallelen Sehnen einerseits und des Ortes ihrer Mittelpunkte andererseits die Beziehung:

(7) $$\operatorname{tg} \alpha \,.\, \operatorname{tg} \beta = \frac{b^2}{a^2}$$

oder:

(8) $$\frac{\cos \alpha \cos \beta}{a^2} - \frac{\sin \alpha \sin \beta}{b^2} = 0.$$

Die Symmetrie dieser Gleichungen in Bezug auf α und β lehrt, dafs wenn die parallelen Sehnen unter dem Winkel β gegen die x-Achse geneigt sind, der Neigungswinkel des sie halbierenden Durchmessers gleich α sein mufs, d. h.:

II. Wenn zwischen den Neigungswinkeln α und β zweier Durchmesser die Relation $\operatorname{tg}\alpha \,.\, \operatorname{tg}\beta = \frac{b^2}{a^2}$ besteht, so halbiert jeder die Sehnen, die dem andern parallel sind. Zwei solche Durchmesser heifsen konjugierte Durchmesser.

Aus Gleichung (7) ergiebt sich, dafs $\operatorname{tg}\alpha$ und $\operatorname{tg}\beta$ immer dasselbe Zeichen haben, d. h. dafs zwei konjugierte Durchmesser immer denselben Quadranten durchschneiden, also nicht, wie bei der Ellipse, durch die Achsen getrennt werden. Ist ferner von den beiden Faktoren $\operatorname{tg}\alpha$ und $\operatorname{tg}\beta$ der eine kleiner als $\frac{b}{a}$, so mufs der andere gröfser als $\frac{b}{a}$ sein und ist einer von den beiden gleich $\frac{b}{a}$, so mufs auch der andere gleich $\frac{b}{a}$ sein, d. h.:

III. Von zwei konjugierten Durchmessern ist der eine stets ein Hauptdurchmesser, der andere ein Nebendurchmesser. Jede Asymptote ist aufzufassen als ein Paar zusammenfallender konjugierter Durchmesser.

Für $\alpha = 0$ mufs $\beta = 90^0$ sein. Sonst kann aber niemals $\operatorname{tg}\alpha \,.\, \operatorname{tg}\beta$ den Werth -1 annehmen. Wir sehen daher:

IV. Die Hauptachse und die Nebenachse einer Hyperbel sind die einzigen auf einander senkrecht stehenden konjugierten Durchmesser.

Wir erhalten daher für die Achsen einer gezeichnet vorliegenden Hyperbel genau dieselbe Konstruktion, welche wir bei der Ellipse (§ 43) kennen gelernt haben.

Aufg. 1. Ein Durchmesser drehe sich von $\alpha = 0^0$ bis $\alpha = 90^0$. Wie bewegt sich der konjugierte? Beweise, dafs die Paare konjugierter Durchmesser sich gegenseitig nicht trennen.

Aufg. 2. Löse dieselbe Aufgabe speciell für die gleichseitige Hyperbel und zeige, dafs stets $\alpha + \beta = 90^0$ ist.

Aufg. 3. Bei der Ellipse gab es einen Spezialfall, den Kreis, bei welchem je zwei konjugierte Durchmesser auf ein-

ander senkrecht stehen. Existirt ein solcher Spezialfall auch für die Hyperbel?

Aufg. 4. Es sei (x_1, y_1) ein Punkt der Hyperbel, also $xy_1 - yx_1 = 0$ die Gleichung des zugehörigen Durchmessers. Beweise, dafs der konjugierte Durchmesser die Gleichung:

$$\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 0$$

besitzt. Bestimme hieraus die Koordinaten seiner Schnittpunkte mit der konjugierten Hyperbel. Man findet $\pm \frac{a}{b} y_1$ und $\pm \frac{b}{a} x_1$.

Aufg. 5. Es seien a' und b' zwei konjugierte Halbmesser. Um die Vorstellungen zu fixieren, nehmen wir an, sie seien beide im ersten Quadranten gelegen. Sind dann x_1, y_1 die Koordinaten des Endpunktes von a', so sind (Aufg. 4) $\frac{a}{b} y_1$, $\frac{b}{a} x_1$ die Koordinaten des Endpunktes von b'. Beweise hieraus die Relation $a'^2 - b'^2 = a^2 - b^2$ (vergl. § 48).

Aufg. 6. Beweise, dafs der Inhalt des durch a' und b' bestimmten Dreiecks (§ 10) gleich $\frac{1}{2} ab$, also konstant ist.

Aufg. 7. Der von a' und b' eingeschlossene Winkel — der sogenannte Konjugationswinkel — sei ω. Zeige, dafs:

$$a'b' \sin \omega = ab$$

ist.

Aufg. 8. Zeige, dafs, wenn a' wächst, auch b' wachsen mufs, und dafs dann der Konjugationswinkel abnimmt. In den Asymptoten fallen a' und b' zusammen, ω ist dann Null und a' und b' sind unendlich grofs.

Aufg. 9. Giebt es auch bei der Hyperbel gleich grofse konjugierte Durchmesser?

Aufg. 10. Zeige, dafs die Asymptoten der Hyperbel $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ zusammenfallen mit den beiden gleichen konjugierten Durchmesser der Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (§ 48).

Aufg. 11. Löse die Aufgaben 5 bis 10 insbesondere für die gleichseitige Hyperbel.

§ 58. Die Gleichung der Hyperbel bezogen auf zwei konjugierte Durchmesser als schiefwinklige Koordinatenachsen.

Unter dem Winkel α gegen die x-Achse werde ein Hauptdurchmesser gezogen. Seine Länge sei $2a'$. Der unter dem Winkel β gegen die x-Achse geneigte konjugierte Nebendurchmesser hat dann ebenfalls eine bestimmte Länge $2b'$ und es ist (§ 55):

$$(1) \qquad \frac{\cos^2\alpha}{a^2} - \frac{\sin^2\alpha}{b^2} = \frac{1}{a'^2},$$

$$(2) \qquad -\left(\frac{\cos^2\beta}{a^2} - \frac{\sin^2\beta}{b^2}\right) = \frac{1}{b'^2}.$$

Wählt man jetzt die beiden Durchmesser als x'-Achse resp. y'-Achse eines neuen schiefwinkligen Koordinatensystems, so erhält man durch genau dieselbe Rechnung wie bei der Ellipse:

$$(3) \qquad \frac{x'^2}{a'^2} - \frac{y'^2}{b'^2} = 1$$

als Gleichung der Hyperbel bezogen auf die konjugierten Durchmesser $2a'$ und $2b'$.

Aufg. Beweise, dafs für die gleichseitige Hyperbel wegen $a = b$, $\alpha + \beta = 90^0$, $a' = b'$ stets die Gleichung:

$$x'^2 - y'^2 = a'^2$$

gilt für je zwei konjugierte Durchmesser als Koordinatenachsen.

§ 59. Die Tangente in einem Punkte der Hyperbel.

Die auf die beiden konjugierten Durchmesser $2a'$ und $2b'$ bezogene Gleichung der Hyperbel sei:

$$(1) \qquad \frac{x^2}{a'^2} - \frac{y^2}{b'^2} = 1.$$

Betrachten wir, wie früher, die Tangente in einem Punkte P_1 der Hyperbel als die Grenzlage der Sekante P_1P_2, wenn P_2 mit P_1 zusammengefallen ist, so erhalten wir durch genau dieselbe Rechnung, die wir bei der Ellipse ausführlich ent-

wickelt haben, indem wir einfach überall b'^2 mit $-b'^2$ vertauschen, als Gleichung der Tangente im Punkte P_1:

(2) $$\frac{xx_1}{a'^2} - \frac{yy_1}{b'^2} = 1.$$

Aufg. 1. Bringe die auf die Hauptachse bezogene Tangentengleichung $\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1$ auf die Normalform. Berechne den Abstand des Mittelpunktes und der Brennpunkte von der Tangente im Punkte (x_1, y_1).

Aufg. 2. Bestimme die Achsenabschnitte der Tangente $\frac{xx_1}{a'^2} - \frac{yy_1}{b'^2} = 1$.

Aufg. 3. Führe die ganze im § 56 besprochene Untersuchung durch unter Voraussetzung der auf konjugierte Durchmesser bezogenen Gleichung $\frac{x^2}{a'^2} - \frac{y^2}{b'^2} = 1$ der Hyperbel. Zeige insbesondere, daſs für $b'^2 - a'^2\mu^2 = 0$ die Gerade $y = \mu x + m$ die Hyperbel in einem im Endlichen und in einem in Unendlichen gelegenen Punkte trifft. Leite daraus weiter ab, daſs, bezogen auf jedes Paar konjugierter Durchmesser, die Gleichungen der beiden Asymptoten:

$$\frac{x}{a'} - \frac{y}{b'} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{x}{a'} - \frac{y}{b'} = 0$$

sind.

Aufg. 4. Transformiere (§ 58) die auf rechtwinklige Achsen bezogenen Asymptotengleichungen:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$$

auf die konjugierten Durchmesser $2a'$ und $2b'$ und verificiere dadurch die Behauptung der vorhergehenden Aufgabe.

Aufg. 5. Beachte, daſs das Produkt der beiden Asymptotengleichungen sich in der Form $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ darstellt und daſs daher die in der vorhergehenden Aufgabe geforderte Transformation schon im § 58 gelöst ist.

Aufg. 6. Beweise, daſs die Asymptoten die Diagonalen des Parallelogramms sind, welches man erhält, wenn man durch die Endpunkte zweier konjugierter Durchmesser Parallelen zu diesen zieht (Verallgemeinerung von Aufg. 9, § 55).

Aufg. 7. Von einer Hyperbel kennt man nach Lage und Gröfse zwei konjugierte Durchmesser $2a'$ und $2b'$. Konstruiere die Asymptoten und die Achsen.

Aufg. 8. Bringe die Gleichung der Tangente auf die Form $y = \frac{b'}{a'} x \sqrt{1 + \frac{b'^2}{y_1^2}} - \frac{b'^2}{y_1}$ und leite daraus die Gleichungen der beiden Asymptoten (als Tangenten der beiden unendlich fernen Punkte) ab.

§ 60. Tangenten und Durchmesser.

Ersetzt man in dem gleichnamigen auf die Ellipse bezüglichen Paragraphen 46 überall b'^2 durch $-b'^2$, so wird man durch genau dieselbe Rechnung zu den folgenden Sätzen geführt:

I. Die Tangenten in den Endpunkten eines Durchmessers sind dem konjugierten Durchmesser und folglich auch einander parallel.

II. Zwei beliebige Tangenten der Hyperbel treffen sich stets in einem Punkte desjenigen Durchmessers, welcher die Verbindungslinie ihrer Berührungspunkte halbiert.

Benutzt man die gleiche Bezeichnung wie in § 46, so lehrt auch bei der Hyperbel die Gleichung $OT_1 = \frac{a'^2}{x_1}$, dafs die Punkte Q, Q', M_1, T_1 harmonische Punkte sind.

III. Die zu irgend einem Paare Supplementarsehnen parallelen Durchmesser sind konjugiert.

IV. Die Diagonalen eines jeden der Hyperbel umschriebenen Parallelogramms sind konjugierte Durchmesser.

Dabei ist unter einem umschriebenen Parallelogramm ein solches zu verstehen, dessen Seiten die Hyperbel berühren.

Bezieht man endlich die Hyperbel auf einen beliebigen Durchmesser $2a'$ als x-Achse und die in dem einen Endpunkte von $2a'$ konstruierte Tangente als y-Achse, so erhält man wie bei der Ellipse, indem man in der Hyperbelgleichung y un-

geändert läſst und x durch $x + a'$ ersetzt, die Scheitelgleichung:

(1) $$y^2 = 2\frac{b'^2}{a'}x + \frac{b'^2}{a'^2}x^2.$$

Für den Fall rechtwinkliger Koordinaten hat man $a' = a$, $b' = b$, $\frac{b^2}{a} = p$ und erhält daher als Schluſsgleichung:

(2) $$y^2 = 2px + \frac{p}{a}x^2.$$

Aufg. 1. Bezeichnet man mit δ den Abstand des Mittelpunktes O von der Tangente im Punkte P, ist $OP = a'$ und der konjugierte Halbmesser $OQ = b'$, so läſst sich aus dem Dreieck OPQ mit Berücksichtigung von § 57, Aufg. 6 die Relation ableiten: $\delta = \frac{ab}{b'}$ (vergl. § 48).

Aufg. 2. Konstruiere in den Endpunkten eines Durchmessers die Tangenten an die Hyperbel und in den Endpunkten des konjugierten Durchmessers die Tangenten an die konjugierte Hyperbel und zeige, daſs das so entstehende Parallelogramm konstanten Inhalt hat.

§ 61. Die Asymptoten als Koordinatenachsen.

Von den beiden symmetrisch zu den Achsen gelegenen Asymptoten der Hyperbel:

(1) $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

schlieſse die durch den ersten Quadranten gehende mit der x-Achse den Winkel φ ein, dann bildet die andere Asymptote mit der x-Achse den Winkel $-\varphi$. Wählt man diese letztere Asymptote zur x'-Achse, die erstere zur y'-Achse eines schiefwinkligen Koordinatensystems, so gelten für den Übergang von dem alten rechtwinkligen zu diesem neuen schiefwinkligen System die Transformationsformeln:

(2) $$x = (x' + y')\cos\varphi,$$
$$y = (-x' + y')\sin\varphi,$$

welche man erhält, wenn man in den entsprechenden Formeln der § 15 α und β resp. durch $-\varphi$ und φ ersetzt. Führt man

aber (2) in (1) ein, und berücksichtigt, dafs für die Asymptoten die Gleichung:

(3) $$\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}$$

gilt, woraus sich

(4) $$\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

ergiebt, so erhält man die auf die Asymptoten als Koordinatenachsen bezogene Gleichung der Hyperbel:

(5) $$x' y' = \frac{a^2 + b^2}{4}$$

oder auch:

(6) $$x' y' = \frac{c^2}{4} \cdot$$

Das System der beiden Asymptoten ist immer ein schiefwinkliges mit Ausnahme der gleichseitigen Hyperbel, bei welcher die Asymptoten auf einander senkrecht stehen.

Wendet man die gleiche Transformation auf die Gleichung:

(7) $$\frac{x x_1}{a^2} - \frac{y y_1}{b^2} = 1$$

der Tangente der Hyperbel im Punkte (x_1, y_1) an, indem man unter Berücksichtigung von (2) setzt:

(8) $$\begin{aligned} x_1 &= (x_1' + y_1') \cos \varphi, \\ y_1 &= (- x_1' + y_1') \sin \varphi, \end{aligned}$$

so erhält man durch ähnliche Rechnung als Gleichung der Tangente im Punkte (x_1', y_1') bezogen auf die Asymptoten als Koordinatenachsen:

(9) $$x' y_1' + y' x_1' = \frac{c^2}{2}$$

oder, indem man c^2 durch $4 x_1' y_1'$ ersetzt:

(10) $$\frac{x'}{2 x_1'} + \frac{y'}{2 y_1'} = 1.$$

Aufg. 1. Bezeichnet man den Winkel der beiden Asymptoten mit $w = 2\varphi$, so gilt (§ 55, Aufg. 7): $\sin w = \frac{2ab}{c^2} \cdot$ Beweise daraus, dafs der Flächeninhalt des Parallelogramms, welches ein beliebiger Hyperbelpunkt mit den beiden Asymptoten bestimmt, konstant und gleich $\frac{ab}{2}$ ist.

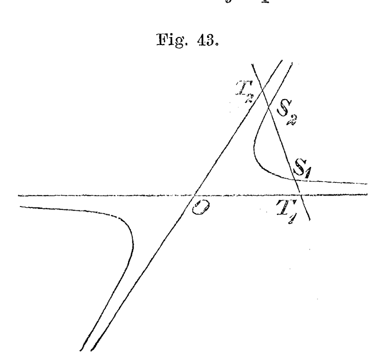
Aufg. 2. Bestimme die Abschnitte, welche die Tangente in einem beliebigen Punkte mit den Asymptoten bildet, und gründe darauf eine Tangentenkonstruktion.

Aufg. 3. Beweise mit Hülfe der Hyperbelgleichung (6), dafs die Hyperbel sich den Asymptoten immer mehr und mehr nähert, ohne sie jedoch je zu erreichen.

§ 62. Beziehungen zwischen den Sehnen und Tangenten einer Hyperbel und ihren Asymptoten.

Die auf die Asymptoten bezogene Gleichung der Hyperbel sei:

Fig. 43.



(1) $$xy = \frac{c^2}{4}.$$

Um die Schnittpunkte der Geraden:

(2) $$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$$

mit der Hyperbel zu bestimmen, berechnen wir aus (1) etwa y und führen diesen Wert in (2) ein. Man gelangt dann zu der quadratischen Gleichung:

(3) $$4qx^2 - 4pqx + c^2p = 0,$$

deren Diskriminante gleich $4pq(pq - c^2)$ ist.

Die Wurzeln und damit auch die Schnittpunkte der Geraden mit der Hyperbel sind daher immer reell und von einander verschieden, sobald p und q entgegengesetztes Zeichen haben oder sobald bei gleichen Zeichen von p und q das Produkt $pq > c^2$ ist.

Bezeichnet man für diesen Fall die beiden reellen Schnittpunkte mit S_1 und S_2, ihre Koordinaten mit x_1, y_1 und x_2, y_2, so erhält man aus (3) für die Koordinaten $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$ des Mittelpunktes der Sehne S_1S_2 die Werte:

(4) $$x = \frac{p}{2}, \quad y = \frac{q}{2}.$$

Dies sind aber auch die Koordinaten des Mittelpunktes des

zwischen den Koordinatenachsen, d. h. den Asymptoten befindlichen Stückes der Geraden (2) und es gilt daher der Satz:

I. Schneidet eine Gerade die Hyperbel in den Punkten S_1 und S_2, ihre Asymptoten in den Punkten T_1 und T_2, so ist der Mittelpunkt der Sehne S_1S_2 zugleich der Mittelpunkt des Segmentes T_1T_2 und es ist daher $S_1T_1 = S_2T_2$ und $S_1T_2 = S_2T_1$.

Dieser Satz gestattet eine einfache Konstruktion der Hyperbel, wenn man ihre Asymptoten und einen Hyperbelpunkt S_1 kennt. Man ziehe nämlich durch S_1 eine beliebige Gerade, welche die Asymptoten in T_1 und T_2 treffen möge und trage S_1T_1 von T_2 aus auf der Geraden ab. Indem man dies beliebig oft wiederholt, erhält man beliebig viele Punkte der Hyperbel, von denen natürlich jeder wieder in der gleichen Weise benutzt werden kann wie S_1.

Ist in (3) $pq = c^2$, so fallen die beiden Schnittpunkte S_1 und S_2 zusammen und die Gerade (2) wird zur Tangente. Aus (3) und (1) ergiebt sich dann zwischen den Achsenabschnitten p und q der Tangente und den Koordinaten x, y ihres Berührungspunktes allemal der Zusammenhang:

(5) $$x = \frac{p}{2}, \quad y = \frac{q}{2},$$

den man natürlich auch aus (4) hätte erschliefsen können, insofern man die Tangente als eine Sekante mit zusammenfallenden Schnittpunkten auffafst. Man hat daher den Satz, der als spezieller Fall von I. angesehen werden kann:

II. Das zwischen den Asymptoten befindliche Stück einer Hyperbeltangente wird im Berührungspunkte halbiert.

Aus (5) erhält man auch sofort die bereits § 61 abgeleitete Gleichung der Tangente im Punkte (x_1, y_1). Da nämlich die Achsenabschnitte $2x_1$ und $2y_1$ sein müssen, so lautet diese Gleichung:

(6) $$\frac{x}{2x_1} + \frac{y}{2y_1} = 1.$$

Da die Achsenabschnitte p und q einer Tangente stets das konstante Produkt $pq = 4x_1y_1 = c^2$ ergeben, so folgt:

III. Jede Tangente einer Hyperbel bestimmt mit

den Asymptoten derselben ein Dreieck von dem konstanten Inhalt ab.

Der Inhalt eines solchen Dreiecks ist nämlich:

$$\tfrac{1}{2} pq \sin w = \tfrac{1}{2} \cdot c^2 \cdot \frac{2ab}{c^2} = ab,$$

insofern w den Asymptotenwinkel bedeutet (§ 55, Aufg. 7).

Aufg. 1. Konstruiere im Punkte (x_1, y_1) der Hyperbel die Tangente mittels der Relationen $2x_1 = p$, $2y_1 = q$.

Aufg. 2. Eine Gerade bewege sich so, daſs das Dreieck, welches sie mit den Schenkeln eines festen Winkels bildet, konstanten Inhalt hat. Welchen Ort beschreibt der Mittelpunkt der in Bewegung befindlichen Dreiecksseite?

Aufg. 3. Von einer Hyperbel kennt man eine Asymptote und drei Punkte. Man soll die Hyperbel und die andere Asymptote konstruieren, indem man auf die durch die drei Punkte bestimmten Sehnen den Satz I anwende.

Aufg. 4. Beweise mit Hilfe von § 59, Aufg. 6, daſs das zwischen den Asymptoten befindliche Stück einer Tangente gleich dem zu dieser Tangente parallelen Durchmesser ist.

Aufg. 5. Beweise, daſs die Koordinaten des Mittelpunktes der zu dem Durchmesser $y = \mu x$ parallelen Sehne gleich $-\frac{m}{2\mu}$ und $\frac{m}{2}$ sind und zeige daraus, daſs $y = -\mu x$ der zu $y = \mu x$ konjugierte Durchmesser ist. Insbesondere sind $y = x$ und $y = -x$ die Gleichungen der Achsen.

Aufg. 6. Beweise, daſs die Tangenten in den Punkten (x_1, y_1) und (x_2, y_2) sich in dem Punkte $\left(\frac{2x_1x_2}{x_1+x_2}, \frac{2y_1y_2}{y_1+y_2}\right)$ treffen und daſs dieser auf dem die Berührungssehne halbierenden Durchmesser liegt.

Aufg. 7. Eine Gerade $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$ bewege sich so, daſs sie fortwährend die Hyperbel $xy = \frac{c^2}{4}$ berühre. Welchen Ort beschreibt der Punkt P, welcher das zwischen den Asymptoten befindliche Stück T_1T_2 der beweglichen Tangente in dem konstanten Verhältnis $\frac{T_1P}{PT_2} = \lambda$ teilt?

Aufg. 8. Zwei Hyperbeln mögen dieselben Asymptoten,

aber verschiedene Excentricitäten besitzen. Ihre auf die gemeinsamen Asymptoten bezogenen Gleichungen seien:

$$xy = \frac{c_1^2}{4} \quad \text{und} \quad xy = \frac{c_2^2}{4}.$$

Ein beliebiger Durchmesser treffe die erste Hyperbel in P_1, die zweite in P_2, dann sind die Tangenten in P_1 und P_2 parallel.

Aufg. 9. Beweise, dafs Hyperbeln mit denselben Asymptoten dieselbe numerische Excentricität besitzen und demnach ähnlich (und ähnlich gelegen) sind.

Aufg. 10. Bestimme die Koordinaten der Brennpunkte und der Scheitel der Hyperbel $xy = \frac{c^2}{4}$, wenn der Asymptotenwinkel gleich w ist. Drücke a und b durch c und w aus. Man findet: $a = c \cos \frac{w}{2}$, $b = c \sin \frac{w}{2}$.

§ 63. Pol und Polare.

Die auf zwei konjugierte Durchmesser $2a'$ und $2b'$ bezogene Gleichung der Hyperbel lautet:

$$\frac{x^2}{a'^2} - \frac{y^2}{b'^2} = 1.$$

Genau wie bei der Ellipse (§ 49) und durch genau dieselbe Rechnung (indem man nur überall $-b'^2$ statt b'^2 schreibt) findet man den Satz:

I. Zieht man von einem beliebigen Punkte Strahlen nach einer Hyperbel und bestimmt jedesmal zu den beiden Schnittpunkten und dem gegebenen Punkte als zugeordnetem den vierten harmonischen Punkt, so ist der Ort dieser vierten harmonischen Punkte eine gerade Linie.

Die Gleichung dieser Geraden lautet:

$$\frac{xx_1}{a'^2} - \frac{yy_1}{b'^2} = 1.$$

Sie heifst die Polare des gegebenen Punktes, dieser der Pol der Geraden.

Bezeichnet man einen beliebigen Punkt der Ebene als aufserhalb der Hyperbel liegend, wenn man durch ihn Gerade

ziehen kann, welche die Hyperbel nicht treffen, dagegen innerhalb der Hyperbel, wenn keine solchen Geraden gezogen werden können, so gelten genau dieselben Betrachtungen und alle die Sätze, die wir in den Paragraphen 49 und 50 für die Ellipse hergeleitet haben, in unveränderter Weise auch für die Hyperbel. Wir empfehlen als eine nützliche Übung dem Leser, alle diese Sätze für die Hyperbel von neuem abzuleiten und namentlich auch die in den betreffenden Paragraphen befindlichen Aufgaben auf die Hyperbel anzuwenden.

Hier möge nur noch der folgende Satz erwähnt werden:

II. Die Polare eines Punktes einer Asymptote ist dieser parallel und fällt mit ihr zusammen, wenn der Punkt der unendlich ferne Punkt der Asymptote ist.

Aufg. 1. Man konstruiere mit Hülfe des vollständigen Vierecks zu einem gegebenen Punkte die Polare.

Aufg. 2. Man bestimme die Koordinaten des Poles der Geraden $Ax + By + C = 0$ in Bezug auf die Hyperbel $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Aufg. 3. Man konstruiere zu einer gegebenen Geraden den Pol.

Aufg. 4. Man beweise durch direkte Rechnung die Richtigkeit von Satz II. Man hat zu diesem Zwecke nur zu zeigen, dafs der Richtungskoeffizient der Polare von (x_1, y_1) gleich $\pm \frac{b}{a}$ ist, sobald $y_1 = \pm \frac{b}{a} x_1$ ist.

§ 64. Brennpunktseigenschaften.

Für die zu einem beliebigen Punkte P der Hyperbel:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{1}$$

gehörigen Brennstrahlen r und r' hatten wir gefunden:

$$r^2 = (c - x)^2 + y^2, \quad r'^2 = (c + x)^2 + y^2. \tag{2}$$

Durch Subtraktion folgt:

$$(r' + r)(r' - r) = 4cx,$$

und da $r' - r = 2a$ ist:

$$r' + r = 2\,\frac{c}{a}\,x = 2\,\varepsilon x\,,$$

wo ε die numerische Excentricität bedeutet.

Aus $r' + r = 2\varepsilon x$ und $r' - r = 2a$ folgt dann:

(3) $$r = \varepsilon x - a\,, \quad r' = \varepsilon x + a.$$

Durch Multiplikation von r und r' erhält man:

$$rr' = \varepsilon^2 x^2 - a^2 = \frac{a^2 + b^2}{a^2}\,x^2 - a^2 = \frac{b^2 x^2}{a^2} + x^2 - a^2,$$

oder mit Berücksichtigung der Hyperbelgleichung:

$$rr' = \frac{b^2 x^2}{a^2} + \frac{a^2 y^2}{b^2}.$$

Aus § 57, Aufg. 5 folgt aber, dafs die rechte Seite gleich b'^2 ist, wenn b' der zu OP konjugierte Halbmesser ist.

Wir erhalten daher, wie bei der Ellipse, die Gleichung:

(4) $$rr' = b'^2,$$

d. h.: I. Das Produkt der Brennstrahlen eines Punktes ist gleich dem Quadrate des zu dem Punkte gehörigen konjugierten Halbmessers.

Um die Abstände d und d' der Brennpunkte von der Tangente im Punkte (x_1, y_1) zu ermitteln, hat man die Gleichung der Tangente:

$$\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1$$

auf die Normalform zu bringen und dann die Koordinaten der Brennpunkte einzuführen. Man erhält:

$$d = \frac{\frac{cx_1}{a^2} - 1}{\sqrt{\frac{x_1^2}{a^4} + \frac{y_1^2}{b^4}}} = b\,\frac{\varepsilon x_1 - a}{\sqrt{\frac{b^2 x_1^2}{a^2} + \frac{a^2 y_1^2}{b^2}}}\,,$$

$$d' = \frac{-\frac{cx_1}{a^2} - 1}{\sqrt{\frac{x_1^2}{a^4} + \frac{y_1^2}{b^4}}} = -b\,\frac{\varepsilon x_1 + a}{\sqrt{\frac{b^2 x_1^2}{a^2} + \frac{a^2 y_1^2}{b^2}}}\,,$$

oder mit Rücksicht auf das Vorhergehende:

(5) $$d = \frac{br}{b'}\,, \quad d' = -\frac{br'}{b'}\,,$$

wenn b' der zu dem Radius Vector des Berührungspunktes

konjugierte Halbmesser ist. Daraus folgt zunächst mit Berücksichtigung von (4):

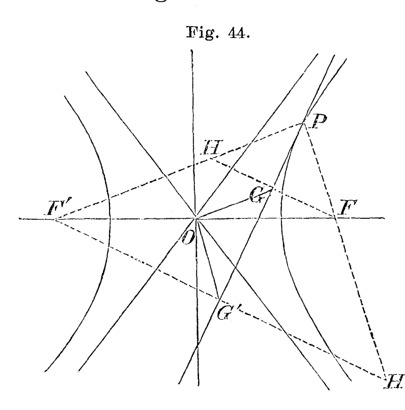
(6) $$dd' = -b^2,$$

in Worten:

II. Das Produkt der Abstände der Brennpunkte von einer Tangente der Hyperbel ist konstant und zwar gleich dem Quadrate der halben Nebenachse.

Das negative Vorzeichen deutet an, daſs die Brennpunkte immer auf verschiedenen Seiten der Tangente liegen, während sie bei der Ellipse sich stets auf derselben Seite befinden. Aus (5) folgt weiter (indem man nur noch die absoluten Längen in Betracht zieht):

Fig. 44.



(7) $$\frac{d}{r} = \frac{d'}{r'}.$$

Daraus folgt aber die Ähnlichkeit der beiden Dreiecke PFG und $PF'G'$ und mithin die Gleichheit der Winkel $\sphericalangle FPG$ und $\sphericalangle F'PG'$, d. h.:

III. Die Tangente halbiert den Winkel der beiden Brennstrahlen.

Die in P auf der Tangente errichtete Senkrechte heiſst die Normale der Hyperbel im Punkte P. Sie halbiert den Nebenwinkel der beiden Brennstrahlen (vergl. § 51).

Wie bei der Ellipse zeigt jetzt eine einfache planimetrische Überlegung, daſs die Gegenpunkte H und H', welche man erhält, wenn man FG und $F'G'$ um sich selbst verlängert, auf den Brennstrahlen von P resp. den Verlängerungen derselben liegen, woraus man leicht erhält:

(8) $$F'H = FH' = 2a,$$

d. h.: IV. Der Ort der Gegenpunkte eines jeden der beiden Brennpunkte in Bezug auf eine bewegliche Tangente ist der mit dem Radius $2a$ um den andern Brennpunkt beschriebene Kreis.

Ebenso findet man wie bei der Ellipse, dafs OG und OG' resp. zu $F'H$ und FH' parallel und folglich gleich a sind. Man hat daher den Satz:

V. Der Ort der Fufspunkte der Lote, die man von den beiden Brennpunkten auf die sämtlichen Tangenten einer Hyperbel fällen kann, ist der mit dem Radius a um den Mittelpunkt der Hyperbel beschriebene Kreis.

Aufg. 1. Leite die Gleichung der Normalen im Punkte P ab und zeige, dafs die Gleichungen (12), (13), (14) des Paragraphen 51 auch für die Hyperbel gelten. Beweise sodann hieraus Satz III.

Aufg. 2. Konstruiere in einem Punkte der Hyperbel Tangente und Normale.

Aufg. 3. Von einem Punkte aufserhalb der Hyperbel die beiden Tangenten zu konstruieren mit Hülfe der Gegenpunkte.

Aufg. 4. Diskutiere die übrigen Aufgaben von § 51 für die Hyperbel.

Aufg. 5. Beweise, dafs der Abstand eines Brennpunktes von einer Asymptote gleich b ist (spezieller Fall von II).

Aufg. 6. Beweise, dafs eine Ellipse und eine Hyperbel, welche dieselben Brennpunkte haben (konfokal sind), sich rechtwinklig schneiden, d. h. dafs in einem Schnittpunkte die Tangente der einen Kurve die Normale der anderen ist.

§ 65. Die Direktrix.

Man nennt die Polare eines Brennpunktes eine Direktrix der Hyperbel. Ihre Gleichung erhält man aus:

$$\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1,$$

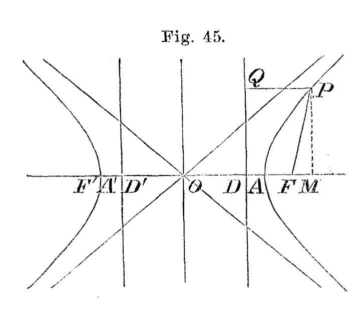
indem man $x_1 = c$, $y_1 = 0$ setzt. Dies giebt:

(1) $$x = \frac{a^2}{c}.$$

In gleicher Weise existiert für den andern Brennpunkt eine Direktrix mit der Gleichung $x = -\frac{a^2}{c}$.

Die Direktrix des Brennpunktes F ist also, ebenso wie die von F', eine Gerade, welche im Abstande $\frac{a^2}{c} = \frac{a}{\varepsilon}$ vom Mittelpunkte auf der Hauptachse senkrecht steht.

Fig. 45.



Berechnet man für einen beliebigen Hyperbelpunkt P den Abstand PF von dem Brennpunkte F und den Abstand PQ von der zugehörigen Direktrix, so erhält man:

$$PF = r = \varepsilon x - a,$$

$$PQ = x - \frac{a}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon}(\varepsilon x - a),$$

folglich:

(2) $$\frac{PF}{PQ} = \varepsilon,$$

d. h.: I. Das Verhältnis der Abstände eines Punktes der Hyperbel von einem Brennpunkte und der zugehörigen Direktrix ist konstant und zwar gleich der numerischen Excentricität.

Für einen beliebigen Punkt (x_1, y_1) der zu F gehörigen Direktrix erhält man wegen $x_1 = \frac{a^2}{c}$ als Gleichung der Polaren:

$$\frac{x}{c} - \frac{y y_1}{b^2} = 1.$$

Durch Vergleichung des Richtungskoeffizienten dieser Polaren mit demjenigen der Verbindungslinie des Punktes (x_1, y_1) mit F findet man, wie bei der Ellipse, den Satz:

II. Die Verbindungslinie eines Brennpunktes mit dem Pole einer beliebigen durch ihn hindurchgehenden Sehne steht senkrecht auf dieser.

Aufg. 1. Bestimme die Direktrix der gleichseitigen Hyperbel.

Aufg. 2. Konstruiere mit Hülfe von II die beiden Tangenten, die man von einem Punkte der Direktrix an die Hyperbel legen kann.

Aufg. 3. Beweise, dafs die Entfernung eines Brenn-

punktes von der zugehörigen Direktrix gleich $\frac{p}{\varepsilon}$ ist, wo p den Halbparameter bedeutet.

Aufg. 4. Von einer Hyperbel sind gegeben ein Brennpunkt, die zugehörige Direktrix und die numerische Excentricität ε. Man soll daraus die Hyperbel konstruieren (§ 55, Aufg. 3).

Aufg. 5. Konstatiere, dafs für einen der Hyperbel nicht angehörigen Punkt das Verhältnis der Abstände von einem Brennpunkte und der zugehörigen Direktrix ein anderes ist, wie für die Hyperbelpunkte.

Sechstes Kapitel.

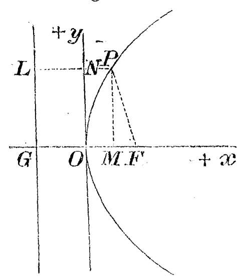
Die Parabel.

§ 66. Definition und Gleichung.

Die Parabel ist der Ort der Punkte, die von einem gegebenen Punkte und einer gegebenen Geraden gleichen Abstand haben.

Der gegebene Punkt heifst der Brennpunkt, die gegebene Gerade die Direktrix oder Leitlinie der Parabel.

Fig. 46.



Um die Gleichung der Parabel abzuleiten, wähle man die Mitte des von dem Brennpunkte F auf die Direktrix gefällten Lotes $FG = p$ zum Anfangspunkt eines rechtwinkligen Koordinatensystems und die Richtung von OF als die positive Richtung der x-Achse. Die Abscissen von F und G sind dann resp. $\frac{p}{2}$ und $-\frac{p}{2}$. Sei nun der Punkt P mit den Koordinaten x, y gleich weit von dem Brennpunkte und der Direktrix entfernt, also $PF = PL$, dann folgt aus der Figur:

$$PF^2 = FM^2 + MP^2 = \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2$$

und:

$$PL = PN + NL = x + \frac{p}{2},$$

also:

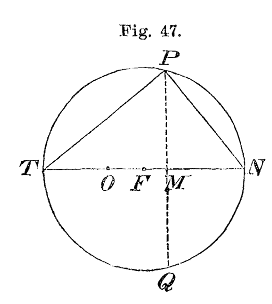
$$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2,$$

oder:

(1) $$y^2 = 2px.$$

Dies ist die Gleichung der Parabel. Sie wird durch die Koordinaten (0, 0) des Anfangspunktes befriedigt, die Parabel geht also durch O hindurch, wie auch aus der Definition unmittelbar folgt. Da ferner nur für positive x sich reelle y aus der Gleichung ergeben, so liegt die Kurve ganz auf der rechten Seite der y-Achse. Jedem positiven x aber entsprechen zwei entgegengesetzt gleiche y, d. h. die Parabel liegt symmetrisch zur x-Achse. Diese Symmetrieachse wird daher auch die Achse der Parabel genannt, ihr Anfangspunkt O heifst der Scheitel der Parabel. Wächst x über alle Grenzen, so wird auch y unendlich grofs. Für $x = \frac{p}{2}$ erhalten wir aus der Parabelgleichung die beiden zum Brennpunkte gehörigen Ordinaten $y = \pm p$. Wie bei der Ellipse und der Hyperbel bezeichnet man die Brennpunktsordinate p als den Halbparameter der Parabel. Dieser Halbparameter p, welcher zugleich die Entfernung des Brennpunktes von der Direktrix angiebt, bestimmt vollständig die Gestalt der Parabel.

Fig. 47.



Aus der Gleichung $y^2 = 2px = 2x \cdot p$ folgt, dafs y immer mittlere Proportionale zu $2x$ und p ist. Dies führt auf eine einfache Konstruktion der Parabel. Trägt man nämlich die Abscisse $OM = x$ von O aus nach links ab, so dafs $MT = 2x$ ist und macht $MN = p$, so hat man nur über TN als Durchmesser einen Kreis zu beschreiben, welcher dann die in M aus TN errichtete Senkrechte in den beiden Parabelpunkten P und Q trifft, da $MP^2 = MT \cdot MN$ ist. Der Mittelpunkt dieses Kreises hat die Abscisse:

$$\frac{(x+p) - x}{2} = \frac{p}{2}$$

und ist daher der Brennpunkt F der Parabel, was die Konstruktion noch vereinfacht.

Aufg. 1. Die Entfernung des Brennpunktes vom Scheitel einer Parabel sei gleich 3, wie heifst ihre Gleichung?

Aufg. 2. Für die Punkte der Parabel mit dem Halbparameter p ist $y^2 - 2px = 0$. Für welche Punkte der Ebene ist die linke Seite positiv, für welche negativ?

Aufg. 3. Wo liegen die Punkte (2, 3); (— 1, 2); (3, — 1); ($\frac{9}{5}$, — 3) in Bezug auf die Parabel $y^2 = 5x$.

Aufg. 4. Wie grofs ist der Halbparameter der Parabel $y^2 - 5x = 0$, wie weit sind Scheitel und Brennpunkt von einander entfernt?

Aufg. 5. Verschiebe das Koordinatensystem parallel zu sich selbst, sodafs der Brennpunkt der neue Anfangspunkt wird. Wie heifst dann die Gleichung der Parabel?

Aufg. 6. Verlege in derselben Weise den Anfangspunkt nach dem Punkte (x_0, y_0) der Parabel und zeige, dafs die Parabelgleichung in dem neuen System $y^2 + 2y_0 y - 2px = 0$ lautet. Warum fehlt x_0?

Aufg. 7. Von einer Parabel sind gegeben die Achse, der Scheitel und ein Punkt P. Man bestimme Halbparameter, Brennpunkt und Direktrix mit Berücksichtigung der im Texte gegebenen Konstruktion.

Aufg. 8. Zeichne die Parabeln, deren Gleichungen $y^2 = 3x$, $y^2 = 5x$, $y^2 = 6x$ sind.

Aufg. 9. Welche Kurve wird durch die Gleichung $y^2 = -2px$ dargestellt? (§ 5, Aufg. 7.)

Aufg. 10. Welche Kurve wird durch die Gleichung $x^2 = 2py$ dargestellt? (§ 5, Aufg. 7.)

Aufg. 11. Zeichne die Parabel $y = x^2$ und bestimme ihren Brennpunkt und ihre Direktrix.

§ 67. Die Parabel und die Gerade. Durchmesser.

Aus der Gleichung $y^2 = 2px$ folgt, dafs jede zur x-Achse parallele Gerade $y = b$ die Parabel in einem einzigen Punkte schneidet, der die Koordinaten $\frac{b^2}{2p}$, b besitzt.

Aus einem später anzugebenden Grunde nennt man eine

jede solche zur Parabelachse parallele Gerade einen Durchmesser der Parabel.

Jede zur y-Achse parallele Gerade $x = a$ (wo a positiv sei) trifft die Parabel in den beiden symmetrisch zur Achse gelegenen Punkten $x = a$, $y = \pm\sqrt{2pa}$. Für $x = 0$ fallen diese beiden Punkte mit dem Scheitel zusammen, sodafs die Gerade $x = 0$, d. h. die y-Achse als eine Sekante mit zwei zusammenfallenden Schnittpunkten zu betrachten ist. Nach dem Früheren ist daher die y-Achse die Tangente der Parabel im Punkte O. Sie wird die Scheiteltangente genannt.

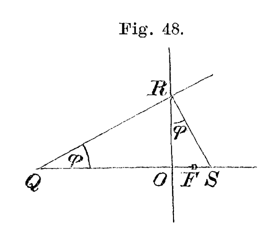
Ist nun eine beliebige Gerade $y = \mu x + b$ gegeben, wo μ jetzt von Null verschieden sei, so erhalten wir die Schnittpunkte derselben mit der Parabel $y^2 = 2px$ durch Kombination der beiden Gleichungen. Die Elimination von x führt zu der in y quadratischen Gleichung:

(1) $$\mu y^2 - 2py + 2pb = 0.$$

Ist die Determinante $p^2 - 2pb\mu$ derselben positiv, so erhalten wir zwei reelle und von einander verschiedene Wurzeln, d. h. die Gerade schneidet die Parabel in zwei von einander verschiedenen Punkten; ist die Determinante gleich Null, so werden die beiden Wurzeln einander gleich, die Gerade trifft alsdann die Parabel in zwei zusammenfallenden Punkten, d. h. sie berührt dieselbe; ist endlich $p^2 - 2pb\mu$ negativ, so sind die Wurzeln der quadratischen Gleichung imaginär und die Gerade hat dann keinen Punkt mit der Parabel gemein.

Da p positiv ist, so wird $p^2 - 2pb\mu = 2p\left(\frac{p}{2} - b\mu\right)$ positiv, Null oder negativ sein, je nachdem $\frac{p}{2}$ gröfser, gleich oder kleiner als $b\mu$ ist. Errichtet man aber in dem Durchschnittspunkte R der Geraden mit der y-Achse die Senkrechte RS, so folgt:

Fig. 48.



$$\mu = \operatorname{tg}\varphi = \frac{OS}{OR},$$

d. h. $OS = OR \cdot \operatorname{tg}\varphi = b\mu$.

Andrerseits ist $\frac{p}{2} = OF$ gleich der Entfernung des Scheitels vom Brennpunkte und es folgt daher:

I. **Eine beliebige Gerade schneidet die Parabel, berührt sie, oder liegt ganz aufserhalb derselben, je nachdem die auf der Geraden in ihrem Schnittpunkte mit der Scheiteltangente errichtete Senkrechte die Parabelachse zwischen dem Scheitel und dem Brennpunkte, im Brennpunkte oder jenseits des Brennpunktes trifft.**

Angenommen die Gerade $y = \mu x + b$ treffe die Parabel in den beiden Punkten S_1 und S_2 mit den Koordinaten x_1, y_1 und x_2, y_2, dann sind y_1 und y_2 die beiden Wurzeln der Gleichung (1), und man erhält daher für die Ordinate des Mittelpunktes der Sehne $S_1 S_2$ den Wert:

$$(2) \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{p}{\mu}.$$

Dieser Ausdruck ist aber von b unabhängig. Konstruiert man daher sämtliche zu der Geraden $y = \mu x + b$ parallelen Sehnen, indem man μ unverändert läfst und b variiert, so erhält man für die Ordinate des Mittelpunktes einer jeden Sehne stets denselben Wert $\frac{p}{\mu}$, und es gilt daher der Satz:

II. **In einer Parabel liegen die Mittelpunkte paralleler Sehnen auf einer zur Achse parallelen Geraden, d. h. auf einem Durchmesser.**

Aufg. 1. Welche Lage haben die Geraden $4x - 2y + 7 = 0$, $5x - y - 1 = 0$, $18x - y + 1 = 0$, $x + 2y + 6 = 0$, $x + y - 1 = 0$ zur Parabel $y^2 - 6x = 0$?

Aufg. 2. Bestimme für die Parabel $y^2 - 3x = 0$ den Ort der Mittelpunkte der zu der Geraden $3x - 7y + 2 = 0$ parallelen Sehnen. In welchem Punkte trifft dieser Ort die Parabel?

Aufg. 3. Gegeben ist die Parabel $y^2 = \frac{7}{2}x$ und die Gleichung $5y - 2 = 0$ eines Durchmessers. Wie heifst die Gleichung des Systems paralleler Sehnen, welche durch diesen Durchmesser halbiert werden?

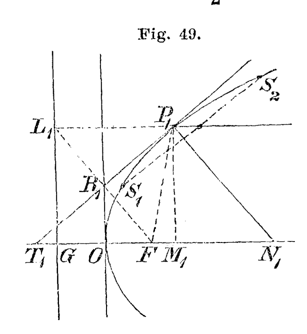
Aufg. 4. Gegeben ist die Parabel $y^2 = 8x$ und der Durchmesser $y + 3 = 0$. Wie heifst die Gleichung der durch den Punkt (5, 2) gehenden Sehne, welche durch jenen Durchmesser halbiert wird?

Aufg. 5. Gegeben sei die Parabel $y^2 = 2px$. Man konstruiere den Durchmesser, welcher die Mittelpunkte der Sehnen von gegebener Richtung enthält, insbesondere für die Richtung von 45^0.

§ 68. Tangente und Normale.

Die Gerade $y = \mu x + b$ schneide die Parabel in den beiden Punkten S_1 und S_2, dann ist also nach dem Vorhergehenden $b\mu < \frac{p}{2}$. Wir wollen nun die Gerade parallel mit sich verschieben, indem wir μ unverändert lassen und b derart variieren, daſs das Produkt $b\mu$ wächst. Bei dieser Verschiebung nähern sich die Schnittpunkte, welche die Gerade jedesmal mit der Parabel gemein hat, einander, während der Mittelpunkt der Sehne $S_1 S_2$ den Durchmesser mit der Gleichung $y = \frac{p}{\mu}$ beschreibt. In dem Momente, in welchem $b\mu = \frac{p}{2}$ wird, fallen S_1 und S_2 in einem Punkte P_1 zusammen, der zugleich auf der Parabel und dem Durchmesser liegen muſs, also die Ordinate $y_1 = \frac{p}{\mu}$ und demnach die Abscisse $x_1 = \frac{p}{2\mu^2}$ besitzt. Diese spezielle Sekante ist daher (§ 34) die Tangente der Parabel im Punkte P_1 und wir sehen:

Fig. 49.



I. Die Tangente im Endpunkte eines Durchmessers ist den Sehnen parallel, die von diesem Durchmesser halbiert werden.

Es ergiebt sich daraus zugleich, daſs zu einer gegebenen Richtung μ nur eine einzige Tangente gehört und daſs $x_1 = \frac{p}{2\mu^2}$, $y_1 = \frac{p}{\mu}$ die Koordinaten des Berührungspunktes derselben sind. Umgekehrt gehört zu jedem Parabelpunkte (x_1, y_1) eine ganz bestimmte Tangente, deren Richtungskoeffizient $\mu = \frac{p}{y_1}$ ist. Die Gleichung der Tangente im Punkte (x_1, y_1) lautet daher:

$$y - y_1 = \frac{p}{y_1}(x - x_1),$$

oder:

$$y y_1 - y_1^2 = p(x - x_1).$$

Da aber:

$$y_1^2 = 2 p x_1$$

ist, so erhalten wir als Gleichung der Tangente im Punkte (x_1, y_1):

(1) $$y y_1 = p(x + x_1).$$

Aus dieser Gleichung ergeben sich die Achsenabschnitte a und b der Tangente, nämlich:

$$a = O T_1 = - x_1,$$

$$b = O R_1 = \frac{p x_1}{y_1} = \frac{y_1}{2},$$

d. h.: II. Die Tangente trifft die Achse in einem Punkte, der vom Scheitel ebenso weit entfernt ist, wie der Fufspunkt der Ordinate des Berührungspunktes.

Daraus folgt dann von selbst, dafs der Abschnitt auf der y-Achse halb so grofs ist wie diese Ordinate. Um also in einem beliebigen Punkte P_1 der Parabel die Tangente zu konstruieren, trage man die Abscisse des Punktes P_1 von O aus nach links ab und verbinde den so erhaltenen Punkt T_1 mit P_1.

Fällt man von P_1 auf die Direktrix das Lot $P_1 L_1$, so ist $P_1 L_1 = P_1 F$. Da überdies $O R_1 = \frac{1}{2} y_1$, $G L_1 = y_1$ ist, so folgt, dafs F, R_1, L_1 in gerader Linie liegen und dafs $F R_1 = R_1 L_1$ ist. Dann sind aber die Dreiecke $F R_1 P_1$ und $L_1 R_1 P_1$ kongruent, woraus sich ergiebt, dafs die Winkel $\sphericalangle F P_1 R_1$ und $\sphericalangle L_1 P_1 R_1$ einander gleich sind und dafs $F R_1$ auf der Tangente senkrecht steht, d. h.:

III. Die Tangente halbiert den Winkel, welchen der Brennstrahl und der Durchmesser des Berührungspunktes mit einander bilden.

IV. Der Fufspunkt des Lotes, welches man von dem Brennpunkte auf eine beliebige Tangente fällen kann, liegt stets auf der Scheiteltangente.

Infolge dieses letzteren Satzes kann man auch sagen, die Parabel werde umhüllt von dem einen Schenkel eines rechten

Winkels, dessen anderer Schenkel beständig durch einen festen Punkt, den Brennpunkt, geht, während sein Scheitel eine feste Gerade, die Scheiteltangente, durchläuft.

Die im Berührungspunkte P_1 auf der Tangente errichtete Senkrechte heifst die Normale der Parabel in P_1. Ihre Gleichung lautet:

(2) $$y - y_1 = -\frac{y_1}{p}(x - x_1).$$

Für $y = 0$ erhalten wir den Abschnitt auf der x-Achse, nämlich:

$$x = ON_1 = x_1 + p.$$

Daraus folgt:

(3) $$M_1 N_1 = p.$$

Man nennt das zwischen der Ordinate und der Normale gelegene Stück der x-Achse die Subnormale des Punktes P_1 und hat daher den Satz:

V. Bei der Parabel ist die Subnormale für alle Punkte konstant, nämlich gleich dem Halbparameter p.

Um von einem beliebigen Punkte (x_0, y_0) aus an die Parabel eine Tangente zu legen, hat man nur die Bedingung dafür auszudrücken, dafs die durch (x_0, y_0) gehende Gerade $y - y_0 = \mu(x - x_0)$ die Parabel in zwei zusammenfallenden Punkten trifft. Durch Elimination von x erhält man wie in § 67 die in y quadratische Gleichung:

(4) $$\mu y^2 - 2py + 2p(y_0 - \mu x_0) = 0,$$

welche die Ordinaten der Schnittpunkte der Geraden mit der Parabel liefert. Diese Schnittpunkte fallen zusammen, wenn die Determinante der quadratischen Gleichung verschwindet, d. h. wenn:

(5) $$2x_0\mu^2 - 2y_0\mu + p = 0$$

ist.

Da diese Gleichung in μ quadratisch ist, so erhält man zwei Werte von μ, welche reell und von einander verschieden, reell und zusammenfallend oder imaginär sind, je nachdem $y_0^2 - 2px_0$ positiv, Null oder negativ ist, d. h. es sind zwei Tangenten, eine oder gar keine möglich, je nachdem der Punkt (x_0, y_0) aufserhalb, auf oder innerhalb der Parabel liegt (§ 66, Aufg. 2).

Sollen insbesondere die beiden durch (x_0, y_0) gehenden Tangenten einen rechten Winkel mit einander einschliefsen, so müssen die beiden Wurzeln μ_1 und μ_2 von (5) der Relation $\mu_1 \mu_2 = -1$ genügen, d. h. es mufs sein:

$$(6) \qquad \frac{p}{2x_0} = -1 \quad \text{oder} \quad x_0 = -\frac{p}{2},$$

oder der Punkt (x_0, y_0) mufs auf der Direktrix liegen. Umgekehrt erhält man für jeden Punkt der Direktrix die Relation $\mu_1 \mu_2 = -1$ und es gilt daher der Satz:

VI. Der Ort der Punkte, von denen aus man zwei auf einander senkrechte Tangenten an eine Parabel legen kann, ist die Direktrix.

Aufg. 1. Gegeben ist die Parabel $y^2 = 11x$. Beweise, dafs die Gerade $11x - 6y + 9 = 0$ die Parabel berührt und bestimme die Koordinaten des Berührungspunktes.

Aufg. 2. Wie heifst für dieselbe Parabel die Gleichung der Tangente, welche der Geraden $2x - 7y + 3 = 0$ parallel ist?

Aufg. 3. Für die Parabel $y^2 - 11x = 0$ die Gleichung der Tangente und der Normale im Punkte $(\frac{25}{11}, -5)$ zu bestimmen.

Aufg. 4. Beweise, dafs für die Parabel $y = x^2$ die Gleichung der Tangente im Punkte (x_1, y_1) lautet: $y + y_1 = 2xx_1$ (§ 5, Aufg. 7).

Aufg. 5. Von einer Parabel kennt man den Scheitel, die Scheiteltangente und einen Punkt P. Man soll mit Hülfe von Tangente, Normale und Subnormale den Brennpunkt bestimmen (Satz II und V).

Aufg. 6. Beweise, dafs man die beiden Tangenten, die man von einem beliebigen Punkte P an die Parabel ziehen kann, dadurch konstruiert, dafs man über der Verbindungslinie von P mit dem Brennpunkte als Durchmesser einen Kreis beschreibt und dessen Schnittpunkte mit der Scheiteltangente mit P verbindet.

Aufg. 7. Beweise mit Hülfe dieser Konstruktion den Satz VI des Textes geometrisch.

Aufg. 8. Von einer gezeichnet vorliegenden Parabel den Brennpunkt, die Achse und die Direktrix zu finden. (An-

deutung: Mittels zweier paralleler Sehnen findet man einen Durchmesser und die Tangente im Endpunkte desselben. Satz III führt dann zu einer durch den Brennpunkt gehenden Geraden und eine Wiederholung der ganzen Konstruktion zum Brennpunkt selbst.)

§ 69. Anwendung schiefwinkliger Koordinaten.

Verschiebt man das rechtwinklige Koordinatensystem, auf welches sich die Parabelgleichung:

Fig. 50.

(1) $$y^2 = 2px$$

bezieht, parallel mit sich selbst nach dem Parabelpunkte (x_0, y_0) als neuem Anfangspunkte und setzt dem entsprechend:

$$x = x_0 + x', \quad y = y_0 + y',$$

unter x', y' die neuen Koordinaten verstehend, so geht die Gleichung (1) über in:

(2) $$y'^2 + 2y_0 y' - 2px' = 0$$

(§ 66, Aufg. 6).

Nunmehr wählen wir den durch P_0 gehenden Durchmesser (die x'-Achse) zur Abscissenachse und die Tangente der Parabel in P_0 zur Ordinatenachse eines schiefwinkligen Koordinatensystems. Ein beliebiger Parabelpunkt P habe die rechtwinkligen Koordinaten $P_0M' = x'$, $M'P = y'$ und die schiefwinkligen Koordinaten $P_0M'' = x''$, $M''P = y''$. Schliefst dann die Tangente in P_0 mit der alten x-Achse (und folglich auch mit der x'-Achse) den Winkel w ein, so ist zunächst:

$$\operatorname{tg} w = \frac{p}{y_0}$$

und es gelten die Transformationsformeln:

$$x' = x'' + y'' \cos w,$$
$$y' = y'' \sin w,$$

die man direkt aus der Figur abliest, die man aber auch aus § 15 erhalten kann, indem man dort $\alpha = 0$, $\beta = w$ setzt. Die Gleichung (2) geht dann über in:

$$y''^2 \sin^2 w + 2y_0 y'' \sin w - 2px'' - 2py'' \cos w = 0,$$

welche wegen $y_0 \sin w = p \cos w$ zu:

$$(3) \qquad y''^2 = 2 \frac{p}{\sin^2 w} \cdot x''$$

wird.

Nun folgt aus $\operatorname{tg} w = \frac{p}{y_0}$, dafs $\sin^2 w = \frac{p^2}{p^2 + y_0{}^2}$ und daher $\frac{p}{\sin^2 w} = \frac{p^2 + y_0{}^2}{p} = p + \frac{y_0{}^2}{p} = p + 2x_0 = 2\left(x_0 + \frac{p}{2}\right)$, d. h. gleich der doppelten Entfernung des Punktes P_0 von der Direktrix ist. Bezeichnen wir diese doppelte Entfernung mit q und schreiben der Einfachheit halber x und y statt x'' und y'', so lautet die auf das schiefwinklige Achsensystem (Durchmesser und zugehörige Tangente) bezogene Parabelgleichung:

$$(4) \qquad y^2 = 2qx.$$

Kombinieren wir mit dieser Gleichung die auf dasselbe schiefwinklige Achsensystem bezogene Gleichung $y = \mu x + b$ einer Geraden, so erhalten wir wie in § 67 die quadratische Gleichung:

$$\mu y^2 - 2qy + 2qb = 0,$$

deren Wurzeln die Ordinaten der Schnittpunkte der Geraden mit der Parabel darstellen und die reell und verschieden, reell und zusammenfallend oder imaginär sind, je nachdem $b\mu$ kleiner, gleich oder gröfser ist als $\frac{q}{2}$. Da sich nun die Entwicklungen des § 68 wesentlich auf die Form der beiden Gleichungen $y^2 = 2px$ und $y = \mu x + b$ stützten, nicht aber auf den Umstand, dafs zufällig das Achsensystem ein rechtwinkliges war, so haben wir in den Rechnungen, die auf die Gleichung der Tangente führten, einfach p mit q zu vertauschen und wir erhalten daher in unserm schiefwinkligen

Achsensystem (dessen Anfangspunkt jetzt mit O bezeichnet werde) als Gleichung der Tangente im Punkte (x_1, y_1) die Gleichung:

(5) $$yy_1 = q(x + x_1).$$

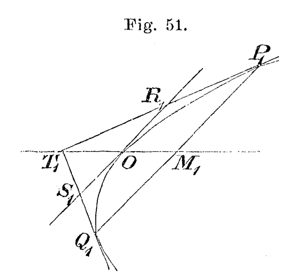


Fig. 51.

Für $y = 0$ ergiebt sich der Abschnitt der Tangente auf der x-Achse, nämlich:

$$x = OT_1 = - x_1.$$

Denselben Achsenabschnitt liefert aber auch der zu P_1 symmetrisch gelegene Punkt Q_1 mit den Koordinaten x_1, $- y_1$, sodafs sich der Satz ergiebt:

Die Tangenten in den Endpunkten einer beliebigen Sehne der Parabel schneiden sich in einem Punkte desjenigen Durchmessers, welcher diese Sehne halbiert. Der Mittelpunkt der Sehne und der Schnittpunkt der beiden Tangenten liegen gleichweit vom Endpunkte des Durchmessers entfernt.

Aufg. 1. Von einer Parabel kennt man einen Durchmesser, die Tangente im Endpunkte desselben und aufserdem noch einen Punkt. Man soll die Tangente in dem letzteren finden.

Aufg. 2. Gegeben ist eine Parabel und ein Punkt aufserhalb derselben. Man konstruiere die beiden von dem Punkte an die Parabel gehenden Tangenten mit Hülfe des durch den Punkt gehenden Durchmessers.

Aufg. 3. Die auf Achse und Scheiteltangente bezogene Parabelgleichung sei $y^2 = 5x$. Wie heifst die Gleichung der Parabel, bezogen auf das durch Durchmesser und Tangente des Parabelpunktes $(\frac{9}{5}, 3)$ gebildete schiefwinklige System?

Aufg. 4. Wie heifst in diesem schiefwinkligen System die Gleichung der Tangente, deren Berührungspunkt in dem ursprünglichen rechtwinkligen System die Koordinaten $\frac{4}{5}, -2$ hat?

§ 70. Pol und Polare.

Die auf einen Durchmesser und die Tangente im Endpunkte desselben bezogene Parabelgleichung sei:

(1) $$y^2 = 2qx.$$

Zwei beliebige Punkte P_1 und P_2 mögen durch ihre auf dasselbe System bezogenen Koordinaten x_1, y_1 und x_2, y_2 gegeben sein. Irgend ein Punkt der Verbindungslinie $P_1 P_2$ hat dann die Koordinaten $\frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$, $\frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$. Damit derselbe auf der Parabel liege, muſs sein Teilverhältnis λ der Gleichung genügen:

$$\left(\frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}\right)^2 = 2q \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda},$$

welche man auch in der Form:

$$(2) \quad \lambda^2 (y_2^2 - 2qx_2) + 2\lambda (y_1 y_2 - q(x_1 + x_2)) + y_1^2 - 2qx_1 = 0$$

schreiben kann. Diese quadratische Gleichung liefert die beiden Teilverhältnisse λ_1 und λ_2, welche den Schnittpunkten S_1 und S_2 der Geraden mit der Parabel entsprechen. Nun folgt wie früher bei der Ellipse, daſs die vier Punkte P_1, P_2, S_1, S_2 *allemal aber auch nur dann* eine harmonische Gruppe bilden, wenn $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ ist, d. h. wenn die Gleichung:

$$(3) \qquad y_1 y_2 - q(x_1 + x_2) = 0$$

besteht.

Wählen wir daher zuerst den Punkt P_1 als einen festen Punkt, so ist der Punkt P_2 nur an die Bedingung geknüpft, daſs seine Koordinaten der Gleichung

$$(4) \qquad yy_1 - 2q(x + x_1) = 0$$

genügen müssen. Diese Gleichung stellt aber eine gerade Linie dar, welche man die *Polare* des Punktes P_1 nennt. In Bezug auf sie wird P_1 der *Pol* genannt.

I. *Zieht man demnach von einem beliebigen Punkte Strahlen nach einer Parabel und bestimmt jedesmal zu den beiden Schnittpunkten und dem gegebenen Punkte als zugeordneten den vierten harmonischen Punkt, so ist der Ort dieser vierten harmonischen Punkte eine Gerade, deren Gleichung* $yy_1 = q(x + x_1)$ *lautet.*

Liegt P_1 auſserhalb der Parabel, so ergiebt sich durch eine einfache Überlegung, daſs die Polare die Berührungssehne ist, d. h. die Verbindungslinie der Berührungspunkte der beiden durch P_1 gehenden Parabeltangenten.

Auch die übrigen Sätze, die wir früher kennen gelernt haben, wiederholen sich ohne irgend welche Schwierigkeit bei der Parabel, sodafs wir uns darauf beschränken können, sie kurz zusammen zu stellen:

II. Die Tangente ist die Polare ihres Berührungspunktes, dieser der Pol der Tangente.

III. Bewegt sich ein Punkt auf einer Geraden, so dreht sich seine Polare um den Pol der Geraden und umgekehrt.

IV. Die Polaren der Punkte eines Durchmessers sind einander parallel, treffen sich also in einem unendlich fernen Punkte — dem Pole dieses Durchmessers.

Setzt man speziell ein rechtwinkliges Koordinatensystem (Parabelachse und Scheiteltangente) voraus, so heifst die Gleichung der Polare des Punktes (x_1, y_1):

$$yy_1 = p(x + x_1).$$

Für $x_1 = \frac{p}{2}$, $y_1 = 0$ findet man hieraus $x = -\frac{p}{2}$, d. h.:

V. Die Polare des Brennpunktes ist die Direktrix.

Die Polare eines Punktes P_1 der Directrix lautet wegen $x_1 = -\frac{p}{2}$:

$$yy_1 = px - \frac{p^2}{2}.$$

Sie geht durch den Brennpunkt und hat den Richtungskoefficienten $\frac{p}{y_1}$. Da nun die Verbindungslinie von P_1 mit dem Brennpunkte den Richtungkoefficienten $-\frac{y_1}{p}$ besitzt, so ergiebt sich wie bei der Ellipse und der Hyperbel der Satz:

VI. Die Verbindungslinie des Brennpunktes mit dem Pole einer beliebigen durch ihn hindurchgehenden Sehne steht senkrecht auf dieser.

Aufg. 1. Beweise die Sätze II, III, IV sorgfältig an Hand der für die Ellipse ausführlich gegebenen Entwicklungen.

Aufg. 2. Man überzeuge sich, dafs die Sätze über Pol und Polare unabhängig von dem gewählten Koordinatensystem sind.

Aufg. 3. Beweise, dafs der Pol der Geraden:

$$ax + by + c = 0$$

in Bezug auf die Parabel $y^2 = 2qx$ die Koordinaten $x_1 = \frac{c}{a}$, $y_1 = -\frac{b}{a}q$ besitzt.

Aufg. 4. Bestimme den Pol der Geraden:

$$5x - 7y + 2 = 0$$

in Bezug auf die Parabel $y^2 - 3x = 0$.

Aufg. 5. Bestimme die Koordinaten der Berührungspunkte der beiden Tangenten, die man vom Punkte $(-5, 3)$ an die Parabel $y^2 - 8x = 0$ ziehen kann. (Benutze die Polare des gegebenen Punktes.)

Aufg. 6. Konstruiere die Polare eines Punktes in Bezug auf die Parabel mit Hülfe des vollständigen Vierecks.

Aufg. 7. Beachte, dafs der Richtungskoefficient der Polare $yy_1 = q(x + x_1)$ nur von der Ordinate des Poles abhängt und beweise daraus Satz IV.

§ 71. Flächeninhalt eines Parabelsegmentes.

Um den Flächeninhalt eines Parabelsegmentes zu bestimmen, welches eine beliebige Sehne P_1Q_1 (vergl. Fig. 51) abschneidet, konstruiere man in P_1 und Q_1 die Tangenten, welche sich in T_1 schneiden mögen, sowie die zu P_1Q_1 parallele Tangente, deren Berührungspunkt O sei. Dann folgt aus $OT_1 = OM_1$ und $R_1S_1 = \frac{1}{2}P_1Q_1$, dafs der Inhalt des der Parabel eingeschriebenen Dreiecks OP_1Q_1 doppelt so grofs ist, wie der Inhalt des zugehörigen umschriebenen Dreiecks $R_1S_1T_1$. Wendet man nun denselben Satz auf die durch die Sehnen OP_1 resp. OQ_1 bestimmten Parabelsegmente an, indem man wieder die zu diesen Sehnen parallelen Tangenten mit ihren Berührungspunkten konstruiert, so entstehen wieder eingeschriebene Dreiecke mit den Grundlinien OP_1 resp. OQ_1 und jedes von diesen ist doppelt so grofs wie das zugehörige durch die Tangenten seiner Eckpunkte gebildete umschriebene Dreieck.

Indem man dieses Verfahren immer wieder von neuem wiederholt, erhält man eine Reihe von eingeschriebenen Drei-

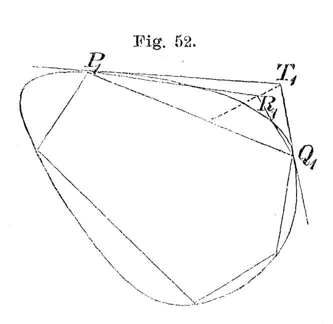


ecken, deren Summe sich immer mehr dem gesuchten Parabelsegment nähert, und gleichzeitig eine Reihe von umschriebenen Dreiecken, deren Summe sich immer mehr der durch den Bogen $P_1 Q_1$ der Parabel und die beiden Tangenten $P_1 T_1$ und $Q_1 T_1$ begrenzten Fläche nähert. Das gesuchte Parabelsegment ist daher doppelt so grofs wie diese Fläche, und da beide zusammen gleich dem Dreieck $P_1 Q_1 T_1$ sind, so folgt:

I. Das von einer beliebigen Sehne abgeschnittene Parabelsegment ist gleich zwei Drittel des von der Sehne und den Tangenten in den Endpunkten derselben gebildeten Dreiecks.

Diesen Satz kann man mit Vorteil dazu verwenden, um den Flächeninhalt einer beliebig krummlinig begrenzten Figur graphisch dadurch zu ermitteln, dafs man dieselbe in eine geradlinig begrenzte verwandelt. Man schreibe nämlich der Figur ein Polygon von so vielen Seiten ein, dafs man die abgeschnittenen Segmente als Parabelsegmente betrachten kann, von denen ein jedes mit Hülfe von I leicht in ein Dreieck verwandelt werden kann. (In der nebenstehenden Figur ist $\triangle P_1 Q_1 R_1 = \frac{2}{3} \triangle P_1 Q_1 T_1$.)

Fig. 52.



Da alle zu $P_1 Q_1$ parallelen Sehnen durch den Durchmesser $T_1 O M_1$ (vergl. Figur 51) halbiert werden, so erkennt man leicht, dafs das Parabelsegment durch den Durchmesser in zwei inhaltsgleiche Teile geteilt wird, und dafs daher der Inhalt des Parabelstückes $O M_1 P_1$ gleich zwei Drittel des Dreieckes $T_1 M_1 P_1$ ist. Ist insbesondere die Sehne $P_1 Q_1$ senkrecht zur Parabelachse, also O der Scheitel der Parabel, und bezeichnet man alsdann die rechtwinkligen Koordinaten von P_1 mit $O M_1 = x_1$, $M_1 P_1 = y_1$, so folgt:

$$O M_1 P_1 = \tfrac{2}{3} x_1 y_1 .$$

Mit Hülfe von I kann man den Satz, dafs das Dreieck $O P_1 Q_1$ doppelt so grofs ist wie das Dreieck $R_1 S_1 T_1$, noch verallgemeinern. Es sei nämlich einer Parabel ein ganz be-

liebiges Dreieck ABC eingeschrieben. Man konstruiere durch die Tangenten der Eckpunkte das zugehörige umschriebene Dreieck $A'B'C'$. Dann folgt in leicht verständlicher Abkürzung:

Fig. 53.

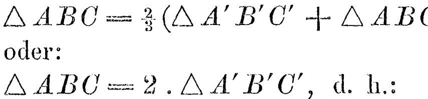
Parabelsegment $(AB) = \frac{2}{3} \triangle ABC'$,

„ $(BC) = \frac{2}{3} \triangle BCA'$,

„ $(CA) = \frac{2}{3} \triangle CAB'$.

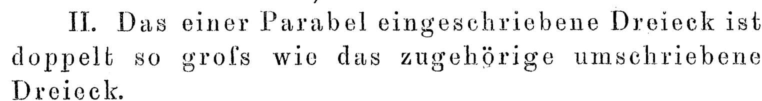
Subtrahiert man die beiden letzten Gleichungen von der ersten, so folgt:

$\triangle ABC = \frac{2}{3} (\triangle A'B'C' + \triangle ABC)$



oder:

$\triangle ABC = 2 . \triangle A'B'C'$, d. h.:



II. Das einer Parabel eingeschriebene Dreieck ist doppelt so grofs wie das zugehörige umschriebene Dreieck.

Aufg. Berechne den Flächeninhalt des Segmentes, welches die Gerade $5x - y - 6 = 0$ von der Parabel $y^2 = 5x$ abschneidet unter der Voraussetzung, dafs die Parabelachse die x-Achse und die Scheiteltangente die y-Achse sei.

§ 72. Gemeinsame Darstellungen von Ellipse, Hyperbel und Parabel.

In der Stereometrie wird gezeigt, dafs sich die Ellipse, die Hyperbel und die Parabel darstellen lassen als Schnitte einer Ebene mit einem geraden Kreiskegel. Aus diesem Grunde werden die drei Kurven auch mit dem gemeinsamen Namen Kegelschnitte bezeichnet. Der Kegelschnitt ist eine geschlossene Kurve, also eine Ellipse, wenn die Schnittebene, von der wir annehmen wollen, dafs sie nicht durch die Spitze des Kegels gehe, sämtliche Seitenlinien des Kegels trifft. Neigt man dann die Ebene immer mehr, bis sie zu einer Seitenlinie des Kegels parallel wird, so geht die Ellipse in eine Parabel über, deren Achse jener Seitenlinie parallel ist. Dreht man die Ebene noch weiter, sodafs sie zwei verschiedenen Seitenlinien des Kegels parallel wird, so besteht die Schnittkurve aus zwei getrennten Teilen, insofern dann auch der durch die Verlängerungen der Seitenlinien gebildete Kreiskegel getroffen

wird. Der Kegelschnitt ist dann eine Hyperbel und die Richtungen jener beiden Seitenlinien bestimmen die Richtungen der beiden Asymptoten. Man sieht aus dieser Entstehungsweise, dafs die Parabel aufzufassen ist als ein Grenzfall sowohl der Ellipse als auch der Hyperbel, welchen man erhält, wenn man den Mittelpunkt der Schnittkurve ins Unendliche rücken läfst. Dies läfst sich aber auch deutlich aus unsern analytischen Entwicklungen erkennen.

In den Paragraphen 46 und 60 haben wir nämlich unter Voraussetzung rechtwinkliger Koordinaten (Hauptachse und Scheiteltangente) für die Ellipse und die Hyperbel die beiden Scheitelgleichungen:

$$(1) \qquad y^2 = 2px - \frac{p}{a}x^2$$

und:

$$(2) \qquad y^2 = 2px + \frac{p}{a}x^2$$

abgeleitet, insofern p den Halbparameter und a die halbe Hauptachse bedeutete.

Vergleicht man aber hiermit die Scheitelgleichung der Parabel nämlich:

$$(3) \qquad y^2 = 2px,$$

so erkennt man sofort, dafs die Gleichungen (1) und (2) in (3) übergehen, sobald man a unendlich grofs werden läfst, d. h. sobald bei unverändertem Halbparameter der Mittelpunkt der Ellipse resp. der Hyperbel ins Unendliche rückt.

Bei dieser Umformung nähert sich die numerische Excentricität ε dem Werte 1, sowohl wenn wir von der Ellipse als auch wenn wir von der Hyperbel ausgehen. Denn es ist $c^2 = a^2 \mp b^2$, wo das obere Zeichen für die Ellipse, das untere für die Hyperbel gilt. Dann folgt aber:

$$\varepsilon^2 = \frac{c^2}{a^2} = 1 \mp \frac{b^2}{a^2} = 1 \mp \frac{ap}{a^2} = 1 \mp \frac{p}{a}.$$

Wird daher bei unverändertem p der Wert von a unendlich grofs, so wird $\varepsilon = 1$. Man kann daher auch die Parabel als eine Ellipse oder als eine Hyperbel mit der numerischen Excentricität $\varepsilon = 1$ bezeichnen.

Wir haben nun darauf aufmerksam gemacht (§ 52, Aufg. 3; § 65, Aufg. 3, 4, 5), dafs sowohl die Ellipse als auch die Hyperbel vollständig bestimmt sind, wenn man einen Brennpunkt, die zugehörige Direktrix und die numerische Excentricität kennt, die bei der Ellipse kleiner als 1 und bei der Hyperbel gröfser als 1 zu wählen ist; wir haben ferner gesehen, dafs sowohl bei der Ellipse als auch bei der Hyperbel das Verhältnis der Abstände eines Kurvenpunktes von dem Brennpunkte und der zugehörigen Direktrix jedesmal gleich der numerischen Excentricität ist, und dafs jeder nicht der Ellipse resp. der Hyperbel angehörige Punkt ein anderes Verhältnis ergiebt (§ 65, Aufg. 5). Kombinieren wir damit den Umstand, dafs die Parabel vollständig bestimmt ist durch den Brennpunkt und die Direktrix, und dafs für jeden Parabelpunkt und nur für einen solchen das Verhältnis der Abstände von dem Brennpunkte und der Direktrix gleich der numerischen Excentricität d. h. gleich 1 ist, so gewinnen wir folgenden die drei Kegelschnitte umfassenden Satz:

Der Ort der Punkte, für welche das Verhältnis der Abstände von einem festen Punkte und einer festen Geraden konstant ist, ist ein Kegelschnitt und zwar eine Ellipse, eine Parabel oder eine Hyperbel, je nachdem das konstante Verhältnis kleiner, gleich oder gröfser ist wie Eins. Der feste Punkt ist ein Brennpunkt, die feste Gerade die zugehörige Direktrix und das konstante Verhältnis die numerische Excentricität des Kegelschnitts.

Fig. 54.

P Q R M F G

Auf Grund dieses Satzes kann man auch eine gemeinsame Gleichung der drei Kegelschnitte gewinnen, die wir unter Benutzung von Polarkoordinaten ableiten wollen. Der feste Punkt F werde zum Anfangspunkt und die Richtung des von F auf die feste Gerade gefällten Lotes FG zur positiven Richtung der x-Achse gewählt. Es sei $FG = d$ und das gegebene konstante Verhältnis gleich ε. Ist dann P ein Punkt des Kegelschnittes, so ist: $\frac{PF}{PQ} = \varepsilon.$

wichtiges Hilfsmittel in der Fiedlerschen Übertragung des Salmonschen Werkes in die Hand gegeben worden; für die des Raumes wird die erwähnte Lücke unserer mathematischen Litteratur auf eine ausgezeichnete Weise durch das vorliegende Lehrbuch ausgefüllt. Dafs der Verfasser desselben vor allen berechtigt war, in diese Lücke einzutreten, dazu hat er sich den Anspruch durch seine rüstige Mitwirkung am Ausbau sowohl der analytisch-geometrischen Methoden, als der hiermit im Zusammenhange stehenden Teile der Algebra erworben; ein Blick in die letzten zwanzig Jahrgänge von Crelles Journal wird genügen, ihm diese Berechtigung zuzuerkennen. Gegenüber der Stellung des Verfassers auf dem Gebiete der Wissenschaft mufs Referent von einer kritischen Besprechung des vorliegenden Werkes absehen, um so mehr, als dieselbe nur auf Anerkennung des darin dargelegten Talentes und der Meisterschaft in der Darstellungsweise hinauslaufen könnte. — [Folgt Inhaltsangabe.] — Für Leser, welche mit den nötigen Vorkenntnissen ausgerüstet, Zugang zu den neueren analytisch-geometrischen Theorieen erhalten wollen, kann das vorliegende Werk als eines der wichtigsten Hilfsmittel bezeichnet werden u. s. w." [O. Fort in der Zeitschrift für Mathematik u. Physik.]

Hesse, Dr. Otto, weil. Professor am königl. Polytechnikum zu München, Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der geraden Linie, des Punktes und des Kreises in der Ebene. Dritte Auflage, revidiert von Dr. S. Gundelfinger, Professor am Grofsherzoglichen Polytechnikum zu Darmstadt. [VIII u. 230 S.] gr. 8. 1881. geh. n. *M.* 5.20.

„Man kann ohne Übertreibung behaupten, dafs es sehr wenige Bücher giebt, die auf dem kleinen Raume von 230 Seiten eine solche Fülle von Material in einer so eleganten und durchaus klaren Darstellung bieten u. s. w." [Schlömilch in d. Zeitschr. f. Mathematik u. Physik.]

Hochheim, Dr. Adolf, Professor, Aufgaben aus der analytischen Geometrie der Ebene. Heft I. Die gerade Linie, der Punkt, der Kreis. gr. 8. 1882. geh. in 2 Abteilungen: A. Aufgaben. [79 S.] n. *M.* 1.50. B. Auflösungen. [102 S.] n. *M.* 1.50.

—— Aufgaben aus der analytischen Geometrie der Ebene. Heft II. Die Kegelschnitte. Abteilung I. Zwei Hefte. gr. 8. 1883. geh. n. *M.* 2.80. A. Aufgaben. [IV u. 76 S.] n. *M.* 1.20. B. Auflösungen. [93 S.] n. *M.* 1.60.

—— Aufgaben aus der analytischen Geometrie der Ebene. Heft III. Die Kegelschnitte. Abteilung II. 2 Hefte. gr. 8. 1886. geh. n. *M.* 2.80. A. Aufgaben. [67 S.] n. *M.* 1.20. B. Auflösungen. [94 S.] n. *M.* 1.60.

Salmon, George, analytische Geometrie der Kegelschnitte mit besonderer Berücksichtigung der neueren Methoden. Frei bearbeitet von Dr. Wilhelm Fiedler, Professor am eidgenössischen Polytechnikum zu Zürich. Fünfte umgearbeitete Auflage. 2 Teile. gr. 8. geh. n. *M.* 16.80.

Einzeln:
I. Teil. [XVI u. 432 S.] 1887. n. *M.* 8.80.
II. — [XX u. S. 433—809.] 1888. n. *M.* 8.—

„Es kann das Werk in der vorliegenden Form der aufmerksamen Beachtung aller Studierenden der Mathematik empfohlen werden, welche auf möglichst einfachem Wege Zugang zu den Resultaten der neueren Forschungen auf dem Gebiete der analytischen Geometrie erlangen wollen; dem Lehrer der Wissenschaft empfiehlt es sich, abgesehen von der vorzüglichen Methodik des Verfassers, welche in der deutschen Bearbeitung durchaus nicht beeinträchtigt ist, namentlich noch durch die grofse Menge von mehr als vierhundert grofsenteils vollständig durchgeführten Aufgaben." [O. Fort in der Zeitschrift für Mathematik.]

Seit fast 40 Jahren ist in weiten mathematisch wissenschaftlichen Kreisen G. Salmons Buch „Conic Sections" einer ganz hervorragenden Teilnahme gewürdigt worden und auch Fiedlers deutsche Bearbeitung hat sich dieser Gunst erfreut; er hat sie durch Einführung zeitgemäfser Fortschritte derselben wert zu erhalten gesucht. Bei dem Erfordernis einer fünften Auflage erschien dem Herausgeber in dieser Richtung vor allem notwendig die systematische Einführung des Imaginären in seiner geometrischen konstruktiven Bestimmtheit; und auch der Umstand, dafs dies vieles andere und namentlich die frühere Entwickelung der Kollineation mit sich bringen mufste, schien ihm kein Hindernis bilden zu dürfen.

Der unbequem starke Band erscheint nun in zwei Teilen, von denen der erste das mehr Elementare enthält. Der zweite hat die Anwendung der allgemeinen Methoden auf die Theorie der Kegelschnitte zum Inhalt.